§4.7　2次関数のグラフ

$\boxed{\text{問題 4.7.1}}$　放物線 P の各点 (x,y) は，2次関数 $y=4x^2$ のグラフの点 $(t,4t^2)$（t はある実数）を x の軸の向きに -2 だけ y 軸の向きに -3 だけ平行移動させた点 $(t-2,4t^2-3)$ なので，$(x,y)=(t-2,4t^2-3)$．$x=t-2$ なので $t=x+2$；$y=4t^2-3$ なので $y=4(x+2)^2-3$，つまり $y=4x^2+16x+13$．故に P をグラフとする関数は $y=4x^2+16x+13$ である．

$\boxed{\text{問題 4.7.2}}$　関数 $y=3x^2$ のグラフの頂点 $(0,0)$ が点 $(4,2)$ に移動する平行移動で，各点は x の軸の向きに 4 だけ y 軸の向きに 2 だけ平行移動する．放物線 P の各点 (x,y) は，関数 $y=3x^2$ のグラフの点 $(t,3t^2)$（t はある実数）を x の軸の向きに 4 だけ y 軸の向きに 2 だけ平行移動させた点 $(t+4,3t^2+2)$ なので，$(x,y)=(t+4,3t^2+2)$．$x=t+4$ なので $t=x-4$；$y=3t^2+2$ なので $y=3(x-4)^2+2$，つまり $y=3x^2-24x+50$．故に P をグラフとする関数は $y=3x^2-24x+50$ である．

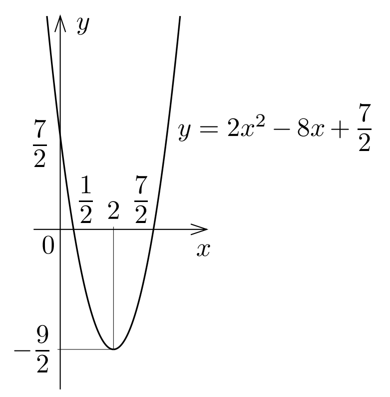
$\boxed{\text{問題 4.7.3}}$

$y=2x^2-8x+\frac{7}{2}=2(x^2-4x+4)-8+\frac{7}{2}=2(x-2)^2-\frac{9}{2}$．

グラフの頂点の座標は $\left(2,-\frac{9}{2}\right)$．$y=2x^2-8x+\frac{7}{2}$ より，$y=0$ のとき，$2x^2-8x+\frac{7}{2}=0$ つまり $x^2-4x+\frac{7}{4}=0$ なので

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-7}}{2}=\frac{4\pm3}{2}=\frac{1}{2},\frac{7}{2}.$$

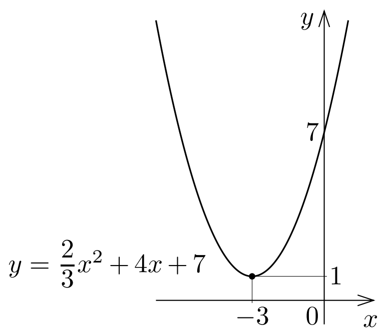
従って $y=2x^2-8x+\frac{7}{2}$ のグラフと x 軸との共有点は $\left(\frac{1}{2},0\right)$ と $\left(\frac{7}{2},0\right)$．また，$x=0$ のとき $y=\frac{7}{2}$ なので，$y=-x^2+4x-4$ のグラフと y 軸との共有点は $\left(0,\frac{7}{2}\right)$ である．



$\boxed{\text{問題 4.7.4}}$

$$\begin{aligned}y&=\frac{2}{3}x^2+4x+7=\frac{2}{3}(x^2+6x)+7\\&=\frac{2}{3}(x^2+6x+9-9)+7=\frac{2}{3}(x+3)^2-6+7\\&=\frac{2}{3}(x+3)^2+1.\end{aligned}$$

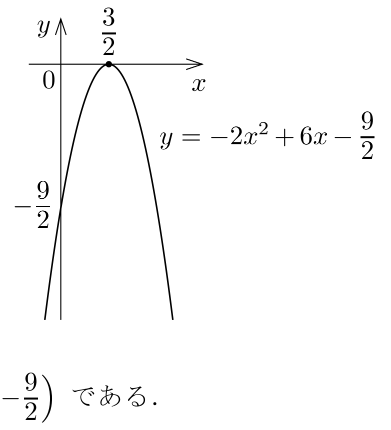
グラフの頂点の座標は $(-3,1)$．$y=\frac{2}{3}x^2+4x+7$ より $y=0$ のとき $\frac{2}{3}x^2+4x+7=0$；この x に関する方程式は実数解を持たない．従って $y=\frac{2}{3}x^2+4x+7$ のグラフと x 軸との共有点は無い．また，$x=0$ のとき $y=7$ なので，$y=\frac{2}{3}x^2+4x+7$ のグラフと y 軸との共有点は $(0,7)$ である．



$\boxed{\text{問題 4.7.5}}$

$$\begin{aligned}y&=-2x^2+6x-\frac{9}{2}=-2(x^2-3x)-\frac{9}{2}\\&=-2\left\{x^2-2\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-\frac{9}{2}=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\\&=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

グラフの頂点は $\left(\frac{3}{2},0\right)$．$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ より $y=0$ のとき $x=\frac{3}{2}$．従って $y=\frac{2}{3}x^2+4x+7$ のグラフと x 軸との共有点は $\left(\frac{3}{2},0\right)$ である．また，$x=0$ のとき $y=-\frac{9}{2}$ なので，$y=-2x^2+6x-\frac{9}{2}$ のグラフと y 軸との共有点は $\left(0,-\frac{9}{2}\right)$ である．



$\boxed{\text{問題 4.7.6}}$　関数 $y=f(x)$ のグラフは，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動させた放物線で，頂点は $(-4,3)$ なので，$f(x)=\frac{1}{2}(x+4)^2+3$，右辺を降冪の順に整理すると $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x+11$．

$\boxed{\text{問題 4.7.7}}$　2次関数 $y=f(x)$ のグラフは点 $(6,-11)$ を頂点とする放物線なので，ある定数 a をとると $f(x)=a(x-6)^2-11$．点 $(3,-5)$ が $y=a(x-6)^2-11$ のグラフに属すので，$-5=a(3-6)^2-11$，$9a=6$，$a=\frac{2}{3}$．よって $f(x)=\frac{2}{3}(x-6)^2-11$ つまり $f(x)=\frac{2}{3}x^2-8x+13$．

$\boxed{\text{問題 4.7.8}}$　関数 $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=\frac{3}{4}x^2$ のグラフを平行移動させた放物線なので，ある定数 b,c をとると $f(x)=\frac{3}{4}x^2+bx+c$．点 $(4,1)$ が関数 $y=\frac{3}{4}x^2+bx+c$ のグラフに属すので，$1=\frac{3}{4}\cdot4^2+b\cdot4+c$ よって $4b+c=-11$．点 $(6,8)$ が関数 $y=\frac{3}{4}x^2+bx+c$ のグラフに属すので，$8=\frac{3}{4}\cdot6^2+b\cdot6+c$ よって $6b+c=-19$．これらの方程式より，$b=-4$ かつ $c=5$．$f(x)=\frac{3}{4}x^2+bx+c$ なので，$f(x)=\frac{3}{4}x^2-4x+5$．