§5.2　2次不等式の証明

$\boxed{\text{問題 5.2.1}}$

$$5x^2-8x+2-(2x^2-5) = 3x^2-8x+7 = 3\left\{x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-\frac{16}{3}+7 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ .$$

任意の実数 x について， $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ ， $3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ ， $3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3} \geq \frac{5}{3} > 0$ なので，
$5x^2-8x+2-(2x^2-5)>0$ ，よって $5x^2-8x+2>2x^2-5$ ．

$\boxed{\text{問題 5.2.2}}$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) &= \frac{1}{4}t^2+3t+9 = \frac{1}{4}(t^2+12x)+9 = \frac{1}{4}(t^2+12x+6^2)-9+9 \\ &= \frac{1}{4}(t+6)^2\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(t+6)^2 \geq 0$ ， $\frac{1}{4}(t+6)^2 \geq 0$ なので，

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) \geq 0\ ,$$

よって $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

等号が成り立つ条件は， $\frac{3}{4}t^2+t+2=\frac{1}{2}t^2-2t-7$ ， $\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right)=0$ ，
$\frac{1}{4}(t+6)^2=0$ ， $t+6=0$ ， $t=-6$ ． 故に $t=-6$ のときに限り $\frac{3}{4}t^2+t+2=\frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

$\boxed{\text{問題 5.2.3}}$

$$\begin{aligned}3x^2+4y^2-(5x-3y-3) &= 3x^2-5x+4y^2+3y+3 = 3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+4\left(y^2+\frac{3}{4}y\right)+3 \\ &= 3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\left\{y^2+2\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{3^2}{8^2}\right\}+3 \\ &= 3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\left\{y^2+2\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}-\frac{9}{16}+3 \\ &= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{17}{48}\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x と y とについて， $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0$ かつ $\left(y+\frac{3}{8}\right)^2 \geq 0$ なので，

$$3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{8}\right)^2 \geq 0\ ,$$

$$3x^2+4y^2-(5x-3y-3) = 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y^2+2\frac{3}{8}\right)^2+\frac{17}{48} \geq \frac{17}{48} > 0\ .$$

よって $3x^2+4y^2>5x+3y-3$ ．

$\boxed{\text{問題 5.2.4}}$

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2a^2+2b^2}{4}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}(a-b)^2\ .$$

任意の実数 a と b とについて， $(a-b)^2 \geq 0$ なので

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0\ ,$$

よって $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ．

等号が成り立つ条件は， $\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ， $\frac{a^2+b^2}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=0$ ， $\frac{1}{4}(a-b)^2=0$ ，
$a-b=0$ ， $a=b$ ． 故に $a=b$ のときに限り $\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ．