

§ 5.3 根号・絶対値記号が現れる不等式

問題 5.3.1 $7^2 = 49$, $(4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48$. $(4\sqrt{3})^2 < 7^2$ なので, $4\sqrt{3} < 7$.

問題 5.3.2 $\left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{169}{9}$, $(3\sqrt{2})^2 = 18 = \frac{162}{9}$. $(3\sqrt{2})^2 < \left(\frac{13}{3}\right)^2$ なので, $3\sqrt{2} < \frac{13}{3}$.

問題 5.3.3

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5} .$$

$2 < \sqrt{5}$ なので $2 - \sqrt{5} < 0$, よって

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 .$$

問題 5.3.4

$$\begin{aligned} |a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 &= (a - b)^2 - (|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2) = -2ab + 2|ab| \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

定理 5.3.2 より $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$, よって $2(|ab| - ab) \geq 0$ なので,

$$|a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 \geq 0 ,$$

$$|a - b|^2 \geq (|a| - |b|)^2 .$$

$|a - b| \geq 0$ なので, 定理 5.3.1 より $|a - b| \geq |a| - |b|$.

問題 5.3.5 $\frac{x}{45} \geq 0$ かつ $\frac{20}{x} \geq 0$ なので, 相加平均と相乗平均との大小関係より

$$\frac{\frac{x}{45} + \frac{20}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{45} \cdot \frac{20}{x}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} .$$

従って $\frac{x}{45} + \frac{20}{x} \geq \frac{4}{3}$. 等号が成り立つ条件は, $\frac{x}{45} = \frac{20}{x}$, つまり $x = \sqrt{45 \cdot 20} = 30$.