§5.8　2次不等式の解法

$\boxed{\text{問題 5.8.1}}$

(1)　不等式　$3x^2+7x>6$　を整理すると　$3x^2+7x-6>0$　;　左辺を因数分解すると $(x+3)(3x-2)>0$ ，よって　$(x+3)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)>0$ ．　この不等式を解くと，　$x<-3$　または $x>\dfrac{2}{3}$ ．

(2)　不等式　$x+12\geq 6x^2$　を整理すると　$6x^2-x-12\leq 0$　;　左辺を因数分解すると $(3x+4)(2x-3)\leq 0$ ，よって　$\left(x+\dfrac{4}{3}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\leq 0$ ．　この不等式を解くと，　$-\dfrac{4}{3}\leq x\leq\dfrac{3}{2}$ ．

$\boxed{\text{問題 5.8.2}}$

(1)　不等式　$x^2+4\geq 6x$　より　$x^2-6x+4\geq 0$ ，左辺を因数分解すると

$$\left(x-3+\sqrt{5}\right)\left(x-3-\sqrt{5}\right)\geq 0 .$$

この不等式を解くと，　$x\leq 3-\sqrt{5}$　または　$x\geq 3+\sqrt{5}$ ．

(2)　不等式　$2x(x+2)<1$　より　$x^2+2x-\dfrac{1}{2}<0$ ，左辺を因数分解すると

$$\left(x+1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<0 .$$

この不等式を解くと，　$-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<-1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ．

$\boxed{\text{問題 5.8.3}}$　　不等式　$-3k^2-2k\geq\dfrac{1}{3}$　より，　$k^2+\dfrac{2}{3}k+\dfrac{1}{9}\leq 0$ ，　$\left(k+\dfrac{1}{3}\right)^2\leq 0$ ，　$k+\dfrac{1}{3}=0$ ， $k=-\dfrac{1}{3}$ ．

$\boxed{\text{問題 5.8.4}}$　　不等式　$y-\dfrac{3}{5}y^2<\dfrac{5}{12}$　より，　$-\dfrac{3}{5}y^2+y-\dfrac{5}{12}<0$　，　$y^2-\dfrac{5}{3}y+\dfrac{25}{36}>0$ ， $\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2>0$ ，$y-\dfrac{5}{6}\neq 0$ ，$y\neq\dfrac{5}{6}$ ．

$\boxed{\text{問題 5.8.5}}$

(1)

$$\frac{2x^2+1}{5}-\frac{x}{2}=\frac{2}{5}x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\left(x^2-\frac{5}{4}x+\frac{25}{64}\right)-\frac{5}{32}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{7}{160} .$$

任意の実数 x について，　$\dfrac{2}{5}\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\dfrac{7}{160}>0$　なので，　$\dfrac{2x^2+1}{5}>\dfrac{x}{2}$ ．　従って総ての実数が与えられた不等式の解である．

(2)

$$2(x+1)^2-x=2x^2+3x+2=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{8}+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8} .$$

任意の実数 x について，　$2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$　なので，　$2(x+1)^2>x$ ．　従って与えられた不等式の解はない．