

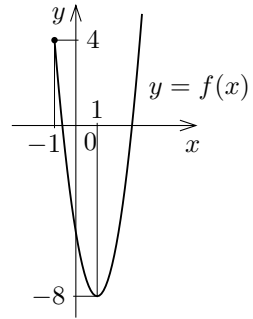
§ 7.4 関数の最大値と最小値

問題 7.4.1 関数 f は、5 において最大値 8 をとり、7 において最小値 3 をとる。

問題 7.4.2 $f(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - 2x + 1) - 3 - 5 \\ &= 3(x-1)^2 - 8. \end{aligned}$$

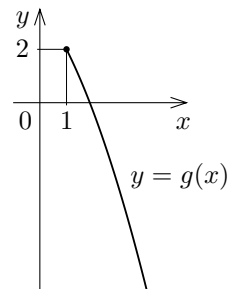
これより、 f は、区間 $[-1, 1]$ で単調減少であり、区間 $[1, \infty)$ で単調増加である。従って関数 f は 1 において最小値 $f(1) = -8$ をとる。 f の最大値はない。



問題 7.4.3 $g(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 4) + \frac{4}{3} + \frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x+2)^2 + 5. \end{aligned}$$

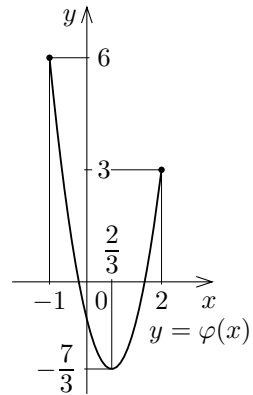
これより、 g は区間 $[1, \infty)$ で単調減少である。従って関数 g は 1 において最大値 $f(1) = 2$ をとる。 g の最小値はない。



問題 7.4.4 $\varphi(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - \frac{4}{3} - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

これより、 φ は区間 $[-1, \frac{2}{3}]$ で単調減少であり、区間 $[\frac{2}{3}, 2]$ で単調増加である。従って関数 φ は $\frac{2}{3}$ において最小値 $-\frac{7}{3}$ をとる。 $\varphi(-1) = 6$ 、 $\varphi(2) = 3$ なので、 φ は -1 において最大値 6 をとる。



問題 7.4.5 $\psi(x)$ を表す式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

これより、 ψ は区間 $[-1, 2]$ で単調増加である。従って関数 ψ は、2 において最大値 $\psi(2) = 7$ をとり、 -1 において最小値 $\psi(-1) = -17$ をとる。

