§7.6　逆関数

$\boxed{\text{問題 7.6.1}}$　関数 f の値域は実数全体なので関数 g の定義域と一致する．また，任意の実数 x について，

$$g\bigl(f(x)\bigr) = -\frac{3f(x)-5}{2} = -\frac{3\left(-\dfrac{2x-5}{3}\right)-5}{2} = -\frac{-(2x-5)-5}{2} = -\frac{-2x}{2} = x \ .$$

従って，逆関数の定義より g は f の逆関数である．

$\boxed{\text{問題 7.6.2}}$　$6 = f(4)$ なので $f^{-1}(6) = f^{-1}\bigl(f(4)\bigr) = 4$ ．　$7 = f(2)$ なので $f^{-1}(7) = f^{-1}\bigl(f(2)\bigr) = 2$ ．　$8 = f(5)$ なので $f^{-1}(8) = f^{-1}\bigl(f(5)\bigr) = 5$ ．　$9 = f(3)$ なので $f^{-1}(9) = f^{-1}\bigl(f(3)\bigr) = 3$ ．

$\boxed{\text{問題 7.6.3}}$　f の値域は区間 $[1,\infty)$ である．区間 $[1,\infty)$ の実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x を求める．$f(x) = y$ つまり $2x+9 = y$ より，$2x = y-9$ ，$x = \dfrac{y-9}{2}$ ．このように，区間 $[1,\infty)$ の各実数 y に対して，$f(x) = y$ となる実数 x は唯一つに定まり，$x = \dfrac{y-9}{2}$ ．故に，f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域は f の値域なので区間 $[1,\infty)$ であり，$f^{-1}(x) = \dfrac{x-9}{2}$ ．

$\boxed{\text{問題 7.6.4}}$　g の値域は区間 $(-\infty,5]$ である．この区間 $(-\infty,5]$ の実数 y に対して $f(x) = y$ となる実数 x を求める．$g(x) = y$ つまり $9-4x = y$ より，$-4x = y-9$ ，$x = \dfrac{y-9}{-4} = \dfrac{9-y}{4}$ ．よって，区間 $(-\infty,5]$ の各実数 y に対して，$g(x) = y$ となる実数 x は唯一つに定まり，$x = \dfrac{9-y}{4}$ ．従って関数 f の逆関数 f^{-1} がある．故に，g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域は g の値域なので区間 $(-\infty,5]$ であり，$g^{-1}(x) = \dfrac{9-y}{4}$ ．