§8.1　平方の逆関数

$\boxed{\text{問題 8.1.1}}$　f の値域は区間 $[-5,\infty)$ なので g の定義域と一致する．f の定義域の任意の実数 x について，

$$g\bigl(f(x)\bigr) = \sqrt{3f(x)+5} = \sqrt{3\left(\frac{x^2}{3}-5\right)+15} = \sqrt{x^2-15+15} = \sqrt{x^2}\ ,$$

x は区間 $[0,\infty)$ に属すので $x \geq 0$ ，よって $\sqrt{x^2} = x$ なので，$g\bigl(f(x)\bigr) = x$ ．故に g は f の逆関数である．

$\boxed{\text{問題 8.1.2}}$　φ の値域は区間 $[3,\infty)$ なので ψ の定義域と一致する．φ の定義域の任意の実数 x について，

$$\psi\bigl(\varphi(x)\bigr) = -\sqrt{\frac{\varphi(x)-3}{4}} = -\sqrt{\frac{(4x^2+3)-3}{4}} = -\sqrt{x^2}\ ,$$

x は区間 $(-\infty,0]$ に属すので $x \leq 0$ ，よって $-x \geq 0$ なので，$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x^2)} = -x$; 従って $\psi\bigl(\varphi(x)\bigr) = -(-x) = x$ ．故に ψ は φ の逆関数である．

$\boxed{\text{問題 8.1.3}}$　関数 f の値域は区間 $[-7,\infty)$ ．この区間 $[-7,\infty)$ の実数 y に対して $f(x)=y$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 x を求める．$f(x)=y$ つまり $5x^2-7=y$ より，$5x^2=y+7$ ，$x^2 = \dfrac{y+7}{5}$ ，$x = \pm\sqrt{\dfrac{y+7}{5}}$; x は区間 $[0,\infty)$ の実数なので $x \geq 0$ ，よって $x = \sqrt{\dfrac{y+7}{5}}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域は区間 $[-7,\infty)$ であり，$f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+7}{5}}$ ．

$\boxed{\text{問題 8.1.4}}$　関数 g の値域は区間 $\left[\dfrac{5}{2},\infty\right)$ ．この区間 $\left[\dfrac{5}{2},\infty\right)$ の実数 y に対して $g(x)=y$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 x を求める．$g(x)=y$ つまり $\dfrac{x^2+5}{2}=y$ より，$x^2+5=2y$ ，$x^2=2y-5$ ，$x=\pm\sqrt{2y-5}$; x は区間 $(-\infty,0]$ の実数なので $x \leq 0$ ，よって $x=-\sqrt{2y-5}$ ．故に，関数 g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域は区間 $\left[\dfrac{5}{2},\infty\right)$ であり，$g^{-1}(x) = -\sqrt{2x-5}$ ．