§9.5　指数・対数に関する不等式

$\boxed{\text{問題 9.5.1}}$ 　$0 < 5^{2x-4} < 45$　なので，　$\log_5 5^{2x-4} < \log_5 45$ ．　この不等式の左辺は $\log_5 5^{2x-4} = 2x-4$ ，右辺は

$$\log_5 80 = \log_5(3^2 5) = \log_5 3^2 + \log_5 5 = 2\log_5 3 + 1\ ;$$

従って $2x-4 < 1+2\log_5 3$ ，故に $x < \dfrac{5}{2} + \log_5 3$ ．

$\boxed{\text{問題 9.5.2}}$ 　対数の式の真数は正なので，　$5k-2>0$ ，よって　$k > \dfrac{2}{5}$ ．　不等式 $3-\log_2(5k-2) \geq 0$ より，　$\log_2(5k-2) \leq 3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$ ，　$5k-2 \leq 8$ ，　$k \leq 2$ ．故に与えられた不等式を解くと，　$k > \dfrac{2}{5}$ かつ $k \leq 2$ ，つまり $\dfrac{2}{5} < k \leq 2$ ．

$\boxed{\text{問題 9.5.3}}$ 　対数の式の真数は正なので，　$5x-11>0$ ，よって　$x > \dfrac{11}{5}$ ．　不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ より $\log_8(5x-11) \geq \dfrac{2}{3}$ ；　$\dfrac{2}{3} = \log_4 8^{\frac{2}{3}} = \log_4 (2^3)^{\frac{2}{3}} = \log_4 2^2 = \log_8 4$ なので，　$\log_8(5x-11) \geq \log_8 4$ ，　$5x-11 \geq 4$ ，　$x \geq 3$ ．故に与えられた不等式を解くと，　$x > \dfrac{11}{5}$ かつ $x \geq 3$ ，つまり $x \geq 3$ ．

$\boxed{\text{問題 9.5.4}}$ 　対数の式の真数は正なので，　$4z-5>0$ ，よって　$z > \dfrac{5}{4}$ ．　不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2 \geq 0$ より，　$\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) \geq -2$ ，　$-2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ なので $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) > \log_{\frac{1}{3}} 9$ ，　$4z-5 \leq 9$ ，　$z \leq \dfrac{7}{2}$ ．故に与えられた不等式を解くと $\dfrac{5}{4} < z \leq \dfrac{7}{2}$ ．