§2.0　シン・定積分

実数 $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表します：

$$\max\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}\ .$$

例えば次のようになります：

$$\max\{-2,5,3,-7\}=5\ ,\qquad \max\left\{\frac{5}{6},3,\frac{9}{2},\frac{7}{3},4\right\}=\frac{9}{2}\ .$$

実数 a,b について $a\le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとします.

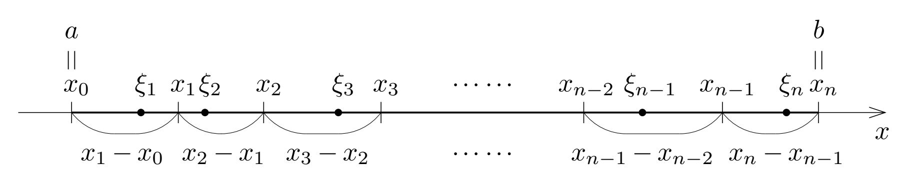
正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ をとり [2]，区間 $[a,b]$ を n 個の小区間 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$，…，$[x_{n-1},x_n]$ に分割します．更に，

$$x_0\le\xi_1\le x_1\ ,\quad x_1\le\xi_2\le x_2\ ,\quad x_2\le\xi_3\le x_3\ ,\quad\cdots\ ,\quad x_{n-1}\le\xi_n\le x_n$$

となる実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとります [3]．ξ_k（$k=1,2,3,\dots,n$）は小区間 $[x_{k-1},x_k]$ から選ばれた実数です.



区間 $[x_0,x_1]$ の幅 x_1-x_0，$[x_1,x_2]$ の幅 x_2-x_1，$[x_2,x_3]$ の幅 x_3-x_1，…，$[x_{n-1},x_n]$ の幅 x_n-x_{n-1}，の中で最も大きいものを δ_n とおきます：

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}\ .$$

また，各区間 $[x_{k-1},x_k]$（$k=1,2,3,\dots,n$）の幅 x_k-x_{k-1} と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ の総和を S_n とおきます：

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\\&=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\ .\end{aligned}$$

この S_n を f の**リーマン和** [4] といいます．リーマン和 S_n は正の自然数を表す変数 n の関数です．実数 $x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をどう定めるかによって様々なリーマン和ができます.

$n\to\infty$ のとき小区間 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\dots,[x_{n-1},x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとします；つまり $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とします [5]．$n\to\infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して，極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まる [6] とき，極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ を a から b までの f の**定積分** (definite integral) といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表します.

つまり，大雑把にいうと，関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限です.

改めて定積分の定義を述べます．この定義は覚えてほしいと思います.

> **定義**　実数 a と b とについて $a\le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，
>
> $$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b$$
>
> となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり，
>
> $$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}\ ,$$
> $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
>
> とおく．S_n の値を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n\to\infty$ のとき収束して，極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を次のように定義する：
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n\ .$$
>
> 関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：
>
> $$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき，a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを f を a から b まで（定）積分するといいます．また，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ において，a を定積分の下端といい，b を定積分の上端といい，区間 $[a,b]$ を積分区間といいます；更に，f を被積分関数といい，x を積分変数といいます.

実数 a と b とついて $a\le b$ とします．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続で，$[a,b]$ において $f(x)\ge 0$ とします．関数 f のグラフにおける f の定積分の意味を考えます.

正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり，δ_n と S_n とを次のように定めます：

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\}\ ,$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\ .$$

S_n は f のリーマン和です.

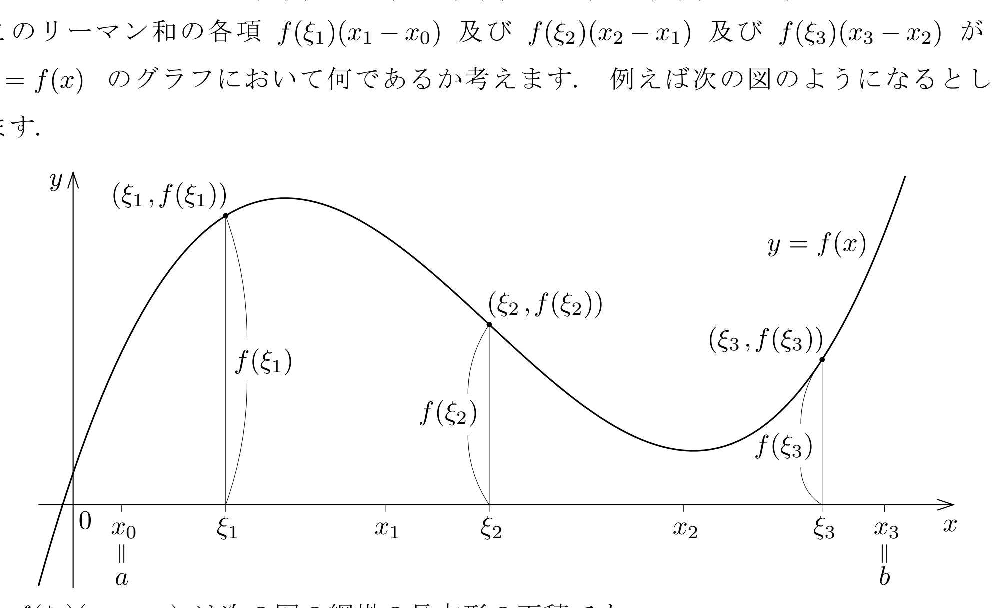
$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とします．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続なので，定理5.1.3より，f は a から b までの定積分可能です；従って

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

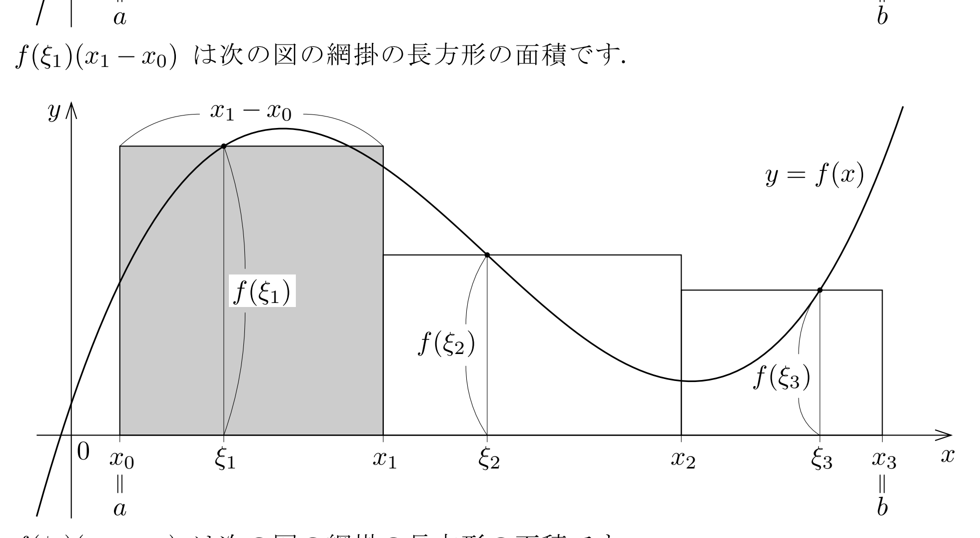
まず $n=3$ のときを考えます．$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3=b$ となる実数 x_0,x_1,x_2,x_3 及び ξ_1,ξ_2,ξ_3 に対して，関数 f のリーマン和 S_3 は

$$\begin{aligned}S_3&=\sum_{k=1}^{3}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\\&=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)\ .\end{aligned}$$

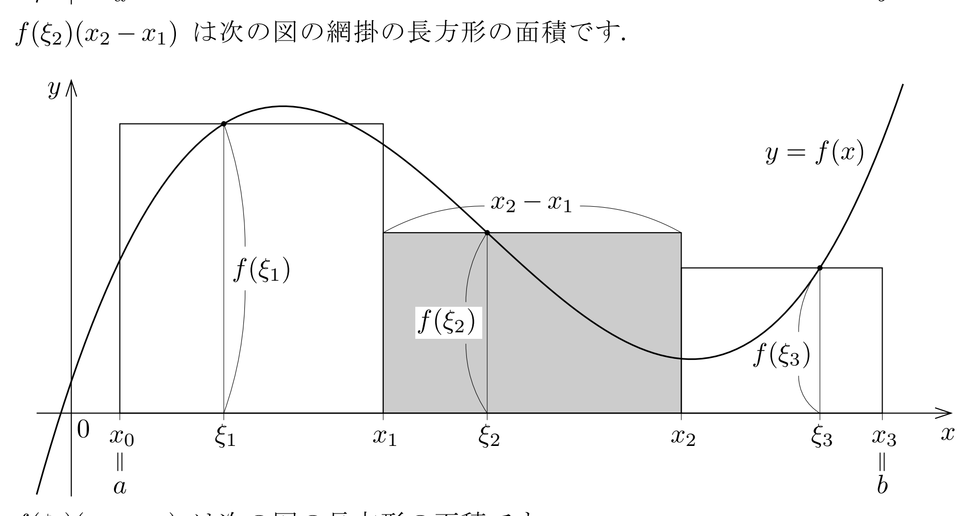
このリーマン和の各項 $f(\xi_1)(x_1-x_0)$ 及び $f(\xi_2)(x_2-x_1)$ 及び $f(\xi_3)(x_3-x_2)$ が $y=f(x)$ のグラフにおいて何であるか考えます．例えば次の図のようになるとします.



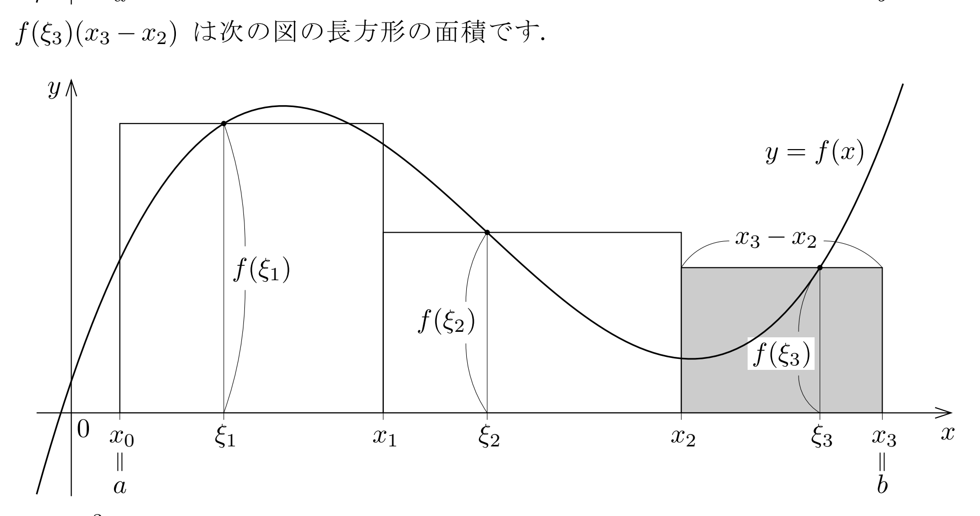
$f(\xi_1)(x_1-x_0)$ は次の図の網掛の長方形の面積です.



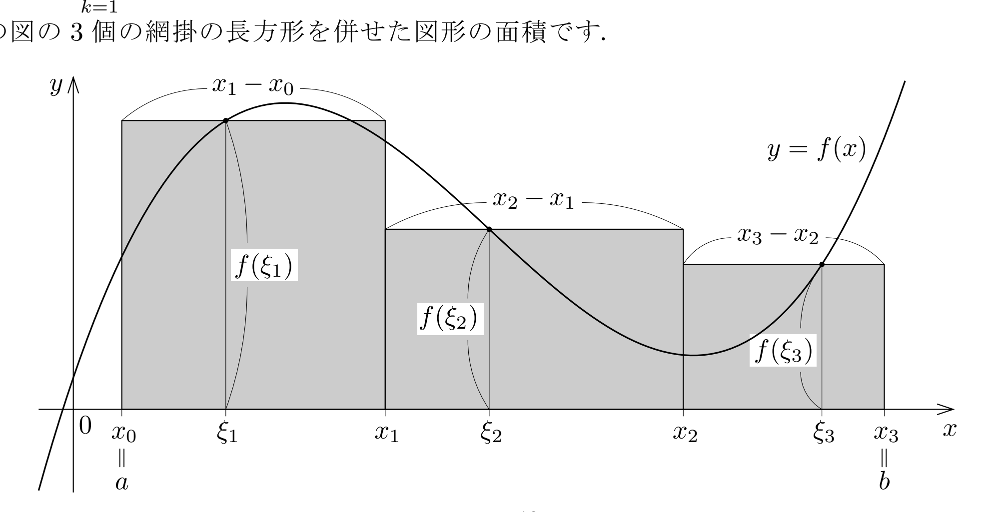
$f(\xi_2)(x_2-x_1)$ は次の図の網掛の長方形の面積です.



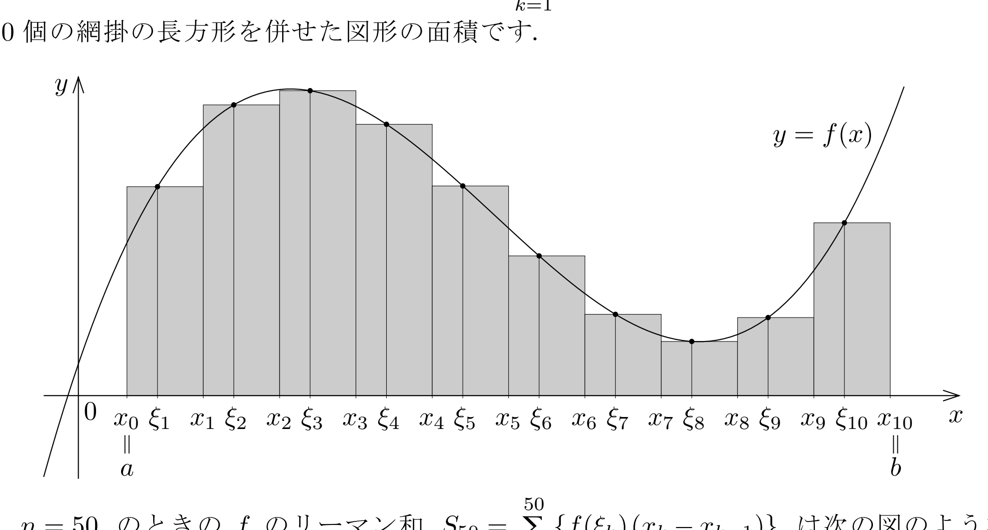
$f(\xi_3)(x_3-x_2)$ は次の図の長方形の面積です.



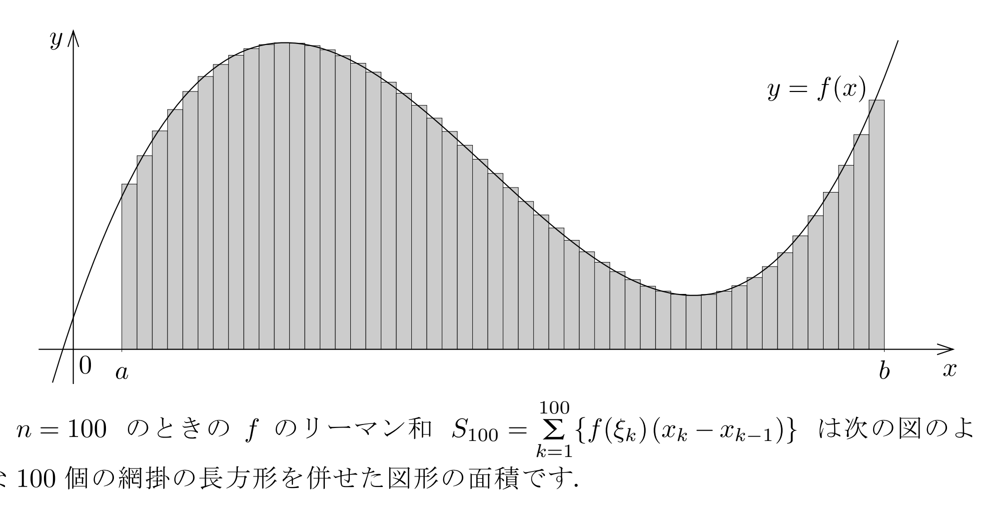
$S_3=\sum_{k=1}^{3}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)$ は次の図の 3 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です.



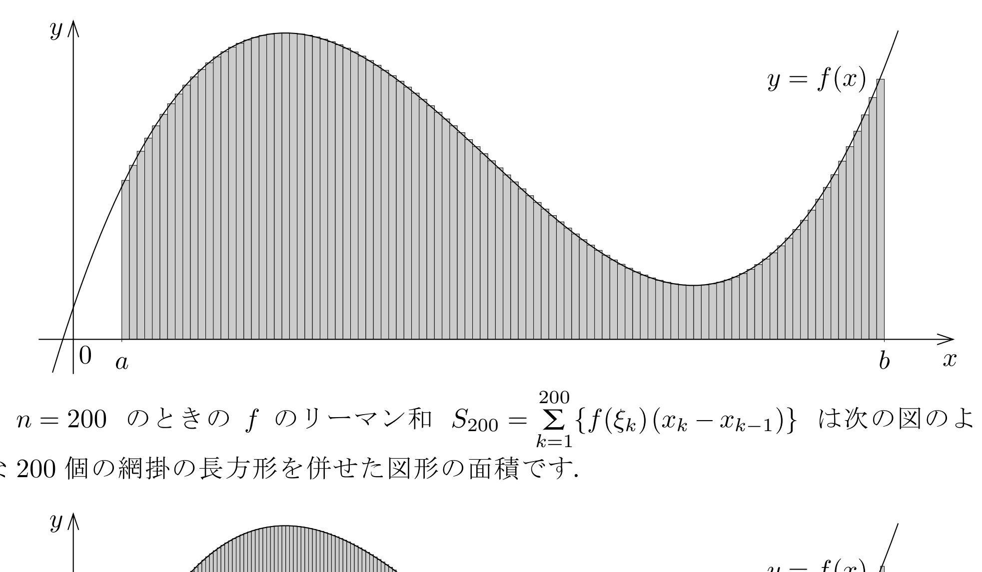
$n=10$ のときの f のリーマン和 $S_{10}=\sum_{k=1}^{10}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 10 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です.



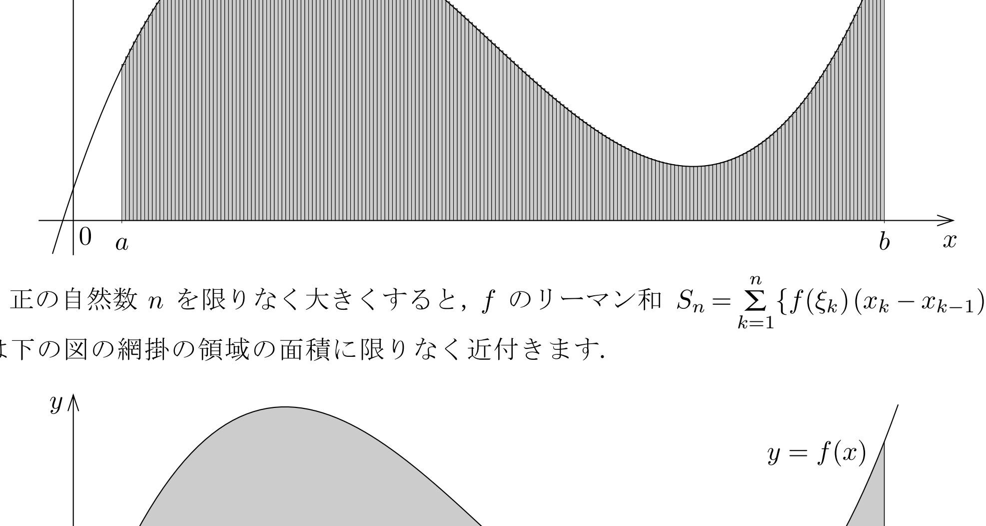
$n=50$ のときの f のリーマン和 $S_{50}=\sum_{k=1}^{50}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 50 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です.



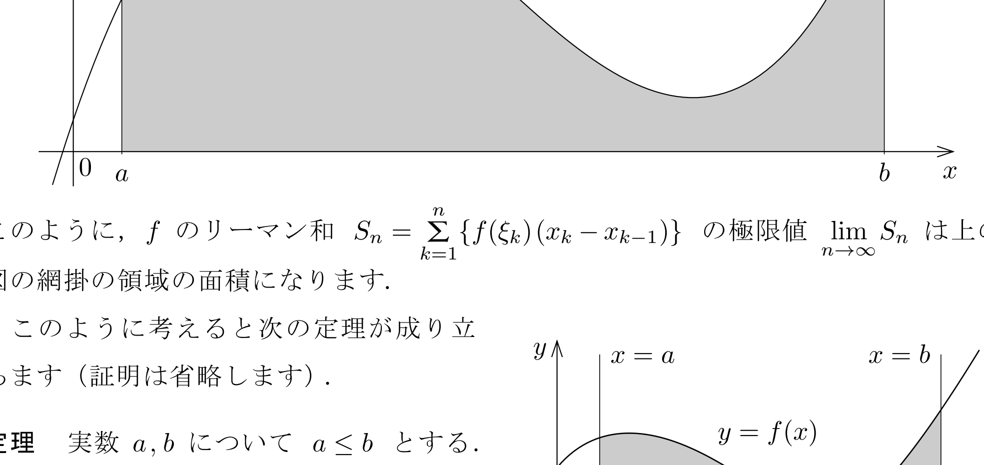
$n=100$ のときの f のリーマン和 $S_{100}=\sum_{k=1}^{100}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 100 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です.



$n=200$ のときの f のリーマン和 $S_{200}=\sum_{k=1}^{200}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 200 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です.



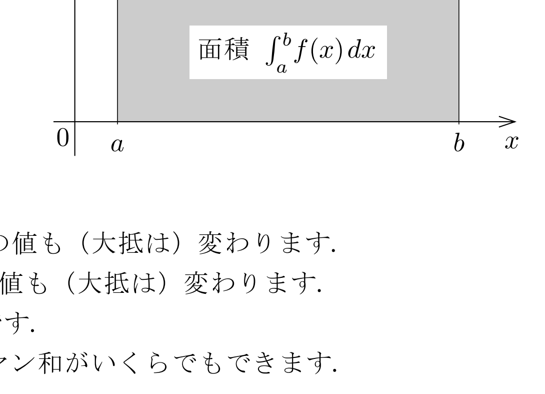
正の自然数 n を限りなく大きくすると，f のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は下の図の網掛の領域の面積に限りなく近付きます.



このように，f のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ は上の図の網掛の領域の面積になります.

このように考えると次の定理が成り立ちます（証明は省略します）.

定理　実数 a,b について $a\le b$ とする．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続であり，区間 $[a,b]$ において $f(x)\ge 0$ とする．xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x=a$ と $x=b$ とで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ である.



---

[2] n の値が変わると $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ の値も（大抵は）変わります.

[3] n の値が変わると $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ の値も（大抵は）変わります.

[4] リーマンは19世紀のドイツの数学者です.

[5] $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ でないと収束しないリーマン和がいくらでもできます.

[6] 極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が，自然数 n に対する実数 $x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ のとりかたとは無関係に決まるということです.