

§2.2 確率変数の関数

定義 確率変数 X の関数 $\varphi(X)$ について、 $Y = \varphi(X)$ となる変数 Y が確率変数であるとき、この変数を確率変数 $\varphi(X)$ という。

確率変数 X に対して、変数 Y を $Y = pX + q$ (p, q は定数) とおきます。 $p > 0$ のとき、任意の実数 a について、

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \leq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right).$$

$p = 0$ のとき、任意の実数 a について、

$$Y \leq a \iff q \leq a,$$

よって

$$P(Y \leq a) = \begin{cases} 1 & (q \leq a \text{ のとき}) \\ 0 & (q > a \text{ のとき}) \end{cases}.$$

$p < 0$ のとき、任意の実数 a について、

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \geq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right).$$

このように、任意の実数 a に対して $Y \leq a$ となる確率 $P(Y \leq a)$ が決まります。よって確率変数 X の関数 $Y = pX + q$ はやはり確率変数です。

確率変数 X に対して、変数 Y を $Y = X^2$ とおきます。実数 a について $a \geq 0$ のとき、

$$Y \leq a \iff X^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a},$$

よって $P(Y \leq a) = P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$ 。確率変数 X の値は実数なので、実数 a について $a \leq 0$ のとき、 $X^2 < a$ つまり $Y < a$ となることはありません；従って $P(Y \leq a) = 0$ です。このように、任意の実数 a に対して $Y \leq a$ となる確率 $P(Y \leq a)$ が決まりますから、確率変数 X の2次関数 $Y = X^2$ はやはり確率変数です。

このような議論を発展させると次の定理が導かれます。

定理 2.2 変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ に対して、確率変数 X の関数 $Y = \varphi(X)$ も確率変数である。

例題 2.2.1 あるさいころを投げてでる目の数を変数 X で表す。このさいころはどの目も等確率ででるとする。このとき変数 X は確率変数になる。更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 6X$ とおく。確率 $P(Y \leq -7)$ を求める。

$$\begin{aligned} Y \leq -7 &\iff X^2 - 6X \leq -7 \iff X^2 - 6X + 7 \leq 0 \\ &\iff 3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

確率変数 X がとり得る値は 1 から 6 までの自然数だけなので、

$$P(Y \leq -7) = P(3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2}) = P(2 \leq X \leq 4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

問題 2.2 ジョーカーを除く 52 枚のトランプカードから等確率で 1 枚のカードを取り出し、カードの数を調べます。ジャックは 11 と、クイーンは 12 と、キングは 13 とみなします。取り出したカードの数を表す変数を X とおきます。この変数 X は確率変数です。更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 8X$ とおきます。確率 $P(Y \leq -9)$ を求めなさい。