§2.3 確率変数の平均値

1.2節で述べたように，データの代表値として平均がありました． 同じように，確率変数についても平均値の概念があります．

例えば，あるくじには当たりと外れとがあり，当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金10万円を貰えて，外れると賞金は貰えないものとします． このくじを何回も引くと，大数の法則より，20回に1回ぐらいの割合で賞金10万円を貰えます；1回あたりの平均では 10万円 $\times \frac{1}{20} = 5000$ 円 貰えます． このようにして，確率変数の1回あたりの平均を考えることができます．

例えば，あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと外れとがあり，1等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金10万円を貰え，2等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{5}$ で当たると賞金1万円を貰え，外れると賞金を貰えないものとします． このくじを何回も引くときの1回あたりの貰える賞金の平均は次のようになります：

$$10\text{万円} \times \frac{1}{20} + 1\text{万円} \times \frac{1}{5} = 5000\text{円} + 2000\text{円} = 7000\text{円} .$$

このように，離散型確率変数の平均値は，確率変数の値とその値をとる確率との積の合計です．

離散型確率変数 X に対して，次の (1), (2) のうちのどちらかが成り立ちました：

(1) 相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0 \le n \le N}$ （ N は自然数） があって

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(\, X = x_n \,) = 1 \ ;$$

(2) 相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n \ge 0}$ があって

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\, X = x_n \,) = 1 \ .$$

定義 離散型確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を次のように定義する：相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0 \le n \le N}$ （ N は自然数） があって $\sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(\, X = x_n \,) = 1$ となるとき，X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ は

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{n=0}^{N} \{ x_n \, \mathrm{P}(\, X = x_n \,) \} \ ;$$

相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n \ge 0}$ があって $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\, X = x_n \,) = 1$ となるとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \{ x_n \, \mathrm{P}(\, X = x_n \,) \}$ が収束するならば，X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ は

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \{ x_n \, \mathrm{P}(\, X = x_n \,) \} \ .$$

確率変数 X の実現値を調べる試行を何回も行うと，X の実現値は様々な値になり得ます． 確率変数 X の平均値とは，大雑把にいうと，試行を何回も行うときの X の実現値の平均です． 確率変数の平均値のことを期待値ということもあります．

$\boxed{\text{例題 2.3.1}}$ あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと3等賞の当たりと外れとがある． 1等賞が当たる確率は $\frac{1}{100}$ で当たると50000円の賞金が貰え，2等賞が当たる確率は $\frac{1}{50}$ で当たると10000円の賞金が貰え，3等賞が当たる確率は $\frac{1}{20}$ で当たると5000円の賞金が貰え，外れると賞金は貰えない． 1等賞が当たることと2等賞が当たることと3等賞が当たることとは互いに独立である． 無作為にこのくじを引いたときに貰える賞金の金額（単位は円）を表す変数を X とおく． この変数 X は確率変数である． 確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求める．

確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= 50000 \cdot \mathrm{P}(\, X = 50000 \,) + 10000 \cdot \mathrm{P}(\, X = 10000 \,) + \\
&\qquad 5000 \cdot \mathrm{P}(\, X = 5000 \,) + 0 \cdot \mathrm{P}(\, X = 0 \,) \\
&= 50000 \cdot \frac{1}{100} + 10000 \cdot \frac{1}{50} + 5000 \cdot \frac{1}{20} = 500 + 200 + 250 \\
&= 950 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.3.1}}$ あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと3等賞の当たりと外れとがあります． 1等賞が当たる確率は $\frac{1}{50}$ で当たると10000円の賞金が貰え，2等賞が当たる確率は $\frac{1}{20}$ で当たると5000円の賞金が貰え，3等賞が当たる確率は $\frac{1}{5}$ で当たると2000円の賞金が貰え，外れると賞金は貰えません． 1等賞が当たることと2等賞が当たることと3等賞が当たることとは互いに独立です． 無作為にこのくじを引いたときに貰える賞金の金額（単位は円）を表す変数を X とおきます． この変数 X は確率変数です． 確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めなさい．

連続型確率変数の平均値を考えます． 例として，人が長さを測らずに目分量で紐を 3m になるべく近い長さで切り出すとき，切り出した紐の実際の長さ（単位は m）を表す変数を X とおきます． この確率変数 X に関する確率について，次のように階級幅を $\varDelta x = 0.5$ として度数分布表のようなものを考えます．

x	$x+\varDelta x$	確率 $\mathrm{P}(\, x < X \le x+\varDelta x \,)$	階級値
$-\infty$	2	0	
2	2.5	0.104	2.25
2.5	3	0.446	2.75
3	3.5	0.401	3.25
3.5	4	0.049	3.75
4	∞	0	

このとき，離散型確率変数の平均値の定義に対応して，確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ は次のように近似できると考えます：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &\fallingdotseq 2.25 \times \mathrm{P}(2 \le X \le 2.5) + 2.75 \times \mathrm{P}(2.5 \le X \le 3) \\
&\qquad + 3.25 \times \mathrm{P}(3 \le X \le 3.5) + 3.75 \times \mathrm{P}(3.5 \le X \le 4) \\
&= 2.25 \times 0.104 + 2.75 \times 0.446 + 3.25 \times 0.401 + 3.75 \times 0.049 \\
&= 2.948 \ .
\end{aligned}$$

この考え方を一般化します．

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とおきます． 実数 a, b について $a < b$ で，X のとり得る値は a 以上 b 以下とします．

正の自然数 n に対して $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b$ となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり，区間 $[a,b]$ を n 個の小さい区間つまり階級 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ に分割します． 階級 $[x_0,x_1]$ の階級幅 $x_1 - x_0$, 階級 $[x_1,x_2]$ の階級幅 $x_2 - x_1$, 階級 $[x_2,x_3]$ の階級幅 $x_3 - x_2$, …, 階級 $[x_{n-1},x_n]$ の階級幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおきます：

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \ldots , x_n - x_{n-1} \} \ .$$

$n \to \infty$ のとき δ_n は 0 に収束するとします； $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

各階級 $[x_{k-1},x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) に属す階級値 ξ_k に対して，確率変数 X の平均値を次の式の値で近似します：

$$\begin{aligned}
&\xi_1 \mathrm{P}(\, x_0 \le X \le x_1 \,) + \xi_2 \mathrm{P}(\, x_1 \le X \le x_2 \,) + \xi_3 \mathrm{P}(\, x_2 \le X \le x_3 \,) + \cdots \\
&\qquad + \xi_{n-1} \mathrm{P}(\, x_{n-2} \le X \le x_{n-1} \,) + \xi_n \mathrm{P}(\, x_{n-1} \le X \le x_n \,) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{ \xi_k \mathrm{P}(\, x_{k-1} \le X \le x_k \,) \} \ .
\end{aligned}$$

$\varDelta x = x_k - x_{k-1}$ とおくと $\dfrac{\mathrm{P}(\, x_{k-1} \le X \le x_k \,)}{x_k - x_{k-1}} = \dfrac{\mathrm{P}(\, x_{k-1} \le X \le x_{k-1} + \varDelta x \,)}{\varDelta x} \fallingdotseq f(\xi_i)$ なので

$$\mathrm{P}(\, x_{k-1} \le X \le x_k \,) \fallingdotseq f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \ ,$$

よって確率変数 X の平均値を次の式 S_n の値で近似します：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{ \xi_k \, f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \} \ .$$

これは関数 $x f(x)$ のリーマン和です． $n \to \infty$ のとき S_n が収束するならば，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を確率変数 X の平均値とします． $n \to \infty$ のとき，

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \ldots , x_n - x_{n-1} \}$$

が 0 に収束するので，関数 $x f(x)$ が a から b まで定積分可能であるならば，関数 $x f(x)$ のリーマン和 S_n の極限値は定積分 $\int_a^b x f(x)\,dx$ です：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b x f(x)\,dx \ .$$

このように考えて，関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり，X の取りうる値が a 以上 b 以下であり，関数 $x f(x)$ が a から b まで定積分可能であるとき，X の平均値は定積分 $\int_a^b x f(x)\,dx$ とします．

確率変数 X の値の範囲を限定しないときは次のように考えます：関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり，関数 $x f(x)$ が実数全体において広義積分可能であるとき，X の平均値は広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ である．

定義 関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき，X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を次のように定義する：広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ が収束するならば

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \ .$$

$\boxed{\text{例題 2.3.2}}$ 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を例題2.1.2の関数と同じものと定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(6-x)}{36} & (\ 0 \le x \le 6 \ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x < 0 \ \text{または} \ x > 6 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

例題2.1.2で確かめたように，この関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になる． この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求める．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^6 x \frac{x(6-x)}{36}\,dx = \frac{1}{36}\int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx \\
&= \frac{1}{36}\Big[2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big]_0^6 = \frac{1}{36}(2 \cdot 6^3 - 9 \cdot 6^2) \\
&= 3 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.3.2}}$ 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を問題2.1.2の関数と同じものと定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{32}(2x + 3 - x^2) & (\ -1 \le x \le 3 \ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x < -1 \ \text{または} \ x > 3 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

問題2.1.2で確かめたように，この関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になります． この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めなさい．

確率変数の平均値は無いこともあります．

$\boxed{\text{例題 2.3.3}}$ 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & (\ x \ge 1 \ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x < 1 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数になることを確かめる． 更に，この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を調べる．

まず $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ を確認する．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^u = \lim_{u\to\infty} \Big(-\frac{1}{u} + 1 \Big) \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

更に，任意の実数 x について $f(x) \ge 0$. 従って関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になる． $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ を調べる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^u x \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \big[\ln x \big]_1^u = \lim_{u\to\infty} (\ln u) \\
&= \infty \ .
\end{aligned}$$

従って，確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ は無い． $\boxed{\text{終}}$

以下の定理が成り立ちます． 証明は後の補遺に回します．

> **定理 2.3.1** 確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ があるならば，定数 c に対して，確率変数 $X + c$ の平均値は
>
> $$\mathrm{E}[X + c] = \mathrm{E}[X] + c \ .$$

> **定理 2.3.2** 確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ があるならば，定数 k に対して，確率変数 kX の平均値は
>
> $$\mathrm{E}[kX] = k\,\mathrm{E}[X] \ .$$

$\boxed{\text{例題 2.3.4}}$ 確率変数 X について $\mathrm{E}[X] = -\frac{7}{3}$ とする． 変数 Y を $Y = \frac{6X + 4}{5}$ とおく． 確率変数 Y の平均値 $\mathrm{E}[Y]$ を求める．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}\left[\frac{6X + 4}{5} \right] = \frac{1}{5}\mathrm{E}[6X + 4] = \frac{1}{5}\big(\mathrm{E}[6X] + 4 \big) \\
&= \frac{1}{5}\big(6\,\mathrm{E}[X] + 4 \big) = \frac{1}{5}\Big\{ 6 \cdot \Big(-\frac{7}{3} \Big) + 4 \Big\} \\
&= -2 \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 2.3.3}}$ 確率変数 X について $\mathrm{E}[X] = \frac{7}{2}$ とします． 変数 Y を $Y = \frac{9 - 4X}{5}$ とおきます． 確率変数 Y の平均値 $\mathrm{E}[Y]$ を求めなさい．

次の定理が成り立ちます． その証明は面倒なので略します．

定理 2.3.3 変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき，変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ について広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx$ が収束するならば，確率変数 $\varphi(X)$ について $\mathrm{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx$.