# 第2章の補遺1　定理の証明

**定理** 2. 補遺 1.1　定数 $c$ は実数とする． 関数 $f(x)$ が連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとき，$X$ の関数 $X+c$ はやはり連続型確率変数であり，その確率密度関数は関数 $f(x-c)$ で与えられる．

**証明**　関数 $f(x)$ は連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとする． 変数 $x, y$ について $y=x+c$ とおく． $x=y-c$ ． $\dfrac{dy}{dx}=1$ より $dx=dy$ ．

$y=u$ のとき $x=u+c$ ， $y=v$ のとき $x=v+c$ なので，

$$\int_u^v f(y-c)\,dy = \int_{u+c}^{v+c} f(x)\,dx \ .$$

$u\to-\infty$ のとき $u+c\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $v+c\to\infty$ なので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(y-c)\,dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_u^v f(y-c)\,dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_{u+c}^{v+c} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= 1 \ .\end{aligned}$$

実数 $a$ に対して，

$$X+c \le a \iff X \le a-c \ .$$

従って

$$\mathrm{P}(\,X+c\le a\,) = \mathrm{P}(\,X\le a-c\,) = \int_{-\infty}^{a-c} f(x)\,dx \ .$$

$x=u$ のとき $y=u+c$ ， $x=a-c$ のとき $y=a$ なので，

$$\int_u^{a-c} f(x)\,dx = \int_{u+c}^{a} f(y-c)\,dy \ .$$

$u\to-\infty$ のとき $u+c\to-\infty$ なので，

$$\int_{-\infty}^{a-c} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^{a-c} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u+c}^{a} f(y-c)\,dy = \int_{-\infty}^{a} f(y-c)\,dy \ .$$

従って，

$$\mathrm{P}(\,X+c\le a\,) = \int_{-\infty}^{a} f(y-c)\,dy \ .$$

故に，関数 $f(x-c)$ は確率変数 $X+c$ の確率密度関数である． 従って確率変数 $X+c$ は連続型確率変数である．（証明終り）

**定理** 2.3.1　確率変数 $X$ の平均値 $\mathrm{E}[X]$ があるならば，定数 $c$ に対して，確率変数 $X+c$ の平均値は $\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[X]+c$ ．

**証明**　変数 $Y$ を $Y=X+c$ とおく．

$X$ が離散型確率変数で，相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ （$N$ は自然数） があって， $\sum\limits_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ とする． $\mathrm{E}[X]=\sum\limits_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}$ ． $n=0,1,2,\dots,N$ について，

$$X=x_n \iff X+c=x_n+c \iff Y=x_n+c \ ,$$

よって $\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=\mathrm{P}(\,Y=x_n+c\,)$ なので，

$$\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,Y=x_n+c\,) = \sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,) = 1 \ .$$

従って $Y=X+c$ は離散型確率変数であり，その平均値 $\mathrm{E}[X+c]$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{N}\{(x_n+c)\,\mathrm{P}(\,Y=x_n+c\,)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N}\{(x_n+c)\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)+c\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}+c\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=\mathrm{E}[X]+c\cdot 1 \\ &= \mathrm{E}[X]+c \ .\end{aligned}$$

$X$ が離散型確率変数で，相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n\ge 0}$ があって $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ となるときも同様である．

$X$ が連続型確率変数で関数 $f(x)$ は $X$ の確率密度関数であるとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \mathrm{E}[X] \ .$$

定理 2. 補遺 1.1 より，関数 $f(x-c)$ が $Y$ の確率密度関数なので，

$$\mathrm{E}[X+c] = \mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\,f(y-c)\,dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_u^v y\,f(y-c)\,dy \ .$$

$x=y-c$ とおく． $y=x+c$ ． $\dfrac{dy}{dx}=1$ より $dy=dx$ ． $u\to-\infty$ のとき $u-c\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $v-c\to\infty$ ． よって

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_u^v y\,f(y-c)\,dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_{u-c}^{v-c}(x+c)\,f(x)\,dx \\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_{u-c}^{v-c}\{x\,f(x)+c\,f(x)\}\,dx \\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \left\{\int_{u-c}^{v-c} x\,f(x)\,dx + c\int_{u-c}^{v-c} f(x)\,dx\right\} \\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_{u-c}^{v-c} x\,f(x)\,dx + c\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}} \int_{u-c}^{v-c} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx + c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{E}[X]+c\cdot 1 \\ &= \mathrm{E}[X]+c \ .\end{aligned}$$

従って $\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[X]+c$ ．（証明終り）

**定理** 2. 補遺 1.2　定数 $k$ は実数で $k\ne 0$ とする． 関数 $f(x)$ が連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとき，$X$ の関数 $kX$ はやはり連続型確率変数であり，その確率密度関数は， $k>0$ のとき関数 $\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ で， $k<0$ のとき関数 $-\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ で与えられる．

**証明**　$k>0$ のときを証明する． 関数 $f(x)$ は連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとする． 変数 $x, y$ について $y=kx$ とおく． $x=\dfrac{y}{k}$ ． $\dfrac{dy}{dx}=k$ より $dx=\dfrac{1}{k}dy$ ．

$y=u$ のとき $x=\dfrac{u}{k}$ ， $y=v$ のとき $x=\dfrac{v}{k}$ なので，

$$\int_u^v \frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}} \frac{1}{k}f(x)\,k\,dx = \int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}} f(x)\,dx \ ,$$

$k>0$ より， $u\to-\infty$ のとき $\dfrac{u}{k}\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $\dfrac{v}{k}\to\infty$ なので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v \frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= 1 \ .\end{aligned}$$

実数 $a$ に対して，

$$kX \le a \iff X \le \frac{a}{k} \ .$$

従って

$$\mathrm{P}(\,kX\le a\,) = \mathrm{P}\left(\,X\le\frac{a}{k}\,\right) = \int_{-\infty}^{\frac{a}{k}} f(x)\,dx \ .$$

$x=u$ のとき $y=ku$ ， $x=\dfrac{a}{k}$ のとき $y=a$ なので，

$$\int_u^{\frac{a}{k}} f(x)\,dx = \int_{ku}^{a} f\Big(\frac{y}{k}\Big)\frac{1}{k}\,dy = \int_{ku}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy \ .$$

$k>0$ より $u\to-\infty$ のとき $ku\to-\infty$ なので，

$$\int_{-\infty}^{\frac{a}{k}} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^{\frac{a}{k}} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{ku}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \int_{-\infty}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy \ .$$

従って，

$$\mathrm{P}(\,kX\le a\,) = \int_{-\infty}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy \ .$$

故に，関数 $\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ は確率変数 $kX$ の確率密度関数である． 従って確率変数 $kX$ は連続型確率変数である．（証明終り）

**定理** 2.3.2　確率変数 $X$ の平均値 $\mathrm{E}[X]$ があるならば，定数 $k$ に対して，確率変数 $kX$ の平均値は $\mathrm{E}[kX]=k\,\mathrm{E}[X]$ ．

**証明**　$k=0$ のとき，

$$\mathrm{E}[kX] = \mathrm{E}[0] = 0 \ , \qquad k\,\mathrm{E}[X] = 0\,\mathrm{E}[X] = 0 \ ,$$

従って $\mathrm{E}[kX]=k\,\mathrm{E}[X]$ ．

$k\ne 0$ とする． 変数 $Y$ を $Y=kX$ とおく．

$X$ が離散型確率変数で，相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ （$N$ は自然数） があって， $\sum\limits_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ とする． $\mathrm{E}[X]=\sum\limits_{n=0}^{N}\{x_i\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}$ ． $n=0,1,2,\dots,N$ について，

$$X=x_n \iff kX=kx_n \iff Y=kx_n \ ,$$

よって $\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=\mathrm{P}(\,Y=kx_n\,)$ なので，

$$\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,Y=kx_n\,) = \sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,) = 1 \ .$$

従って $Y=kX$ は離散型確率変数であり，その平均値 $\mathrm{E}[kX]$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[kX]=\mathrm{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{N}\{(kx_n)\,\mathrm{P}(\,Y=kx_n\,)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N}\{kx_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\} = k\sum_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\} \\ &= k\,\mathrm{E}[X] \ .\end{aligned}$$

$X$ が離散型確率変数で，相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n\ge 0}$ があって $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ となるときも同様である．

$X$ が連続型確率変数で関数 $f(x)$ は $X$ の確率密度関数であるとする． $\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\mathrm{E}[X]$ ． $k>0$ とする． 定理 2. 補遺 1.2 より関数 $\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ が $Y$ の確率密度関数なので，

$$\mathrm{E}[kX] = \mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v \frac{y}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy \ .$$

$x=\dfrac{y}{k}$ とおく． $y=kx$ ． $\dfrac{dy}{dx}=k$ より $dy=k\,dx$ ． $k>0$ なので， $u\to-\infty$ のとき $\dfrac{u}{k}\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $\dfrac{v}{k}\to\infty$ ． よって

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v \frac{y}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}} x\,f(x)\,k\,dx \\ &= k\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}} x\,f(x)\,dx = k\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \\ &= k\,\mathrm{E}[X] \ .\end{aligned}$$

従って $\mathrm{E}[kX]=k\,\mathrm{E}[X]$ ． $k<0$ のときも同様に証明できる．（証明終り）

**定理** 2. 補遺 1.3　関数 $f(x)$ が連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとき，$X$ の関数 $X^2$ はやはり連続型確率変数であり，その確率密度関数は次のような関数 $g(y)$ で与えられる：

$$g(y) = \begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\} & (\ y>0\ \text{のとき}) \\ 0 & (\ y\le 0\ \text{のとき})\end{cases} \ .$$

**証明**　関数 $f(x)$ は連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとする．

実数 $a$ について $a>0$ とする． 関数 $g(y)$ について $\lim\limits_{y\to+0}g(y)=+\infty$ となる可能性があるので， $g(y)$ の定積分 $\int_0^a g(y)\,dy$ を計算するには広義積分する必要がある． 変数 $x, y$ について $x=\sqrt{y}$ とおく． $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ より $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}dy=dx$ ． 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して，関数 $g(y)$ の定義より，

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a g(y)\,dy &= \int_\varepsilon^a \frac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}dy \\ &= \int_\varepsilon^a \big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}\{f(x)+f(-x)\}\,dx \\ &= \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(-x)\,dx \ .\end{aligned}$$

ここで， $t=-x$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(-x)\,dx &= \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{-\sqrt{a}} f(t)\,(-dt) = -\int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{-\sqrt{a}} f(t)\,dt = \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(x)\,dx \ ;\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a g(y)\,dy &= \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(-x)\,dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ は区間 $\big[-\sqrt{a}\,,\sqrt{a}\,\big]$ において積分可能なので，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx\right\} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx \ .$$

従って

$$\begin{aligned}\int_0^a g(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a g(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx\right\} \\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ は 確率変数 $X$ の確率密度関数なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = \lim_{u\to\infty}\int_0^u g(y)\,dy = \lim_{u\to\infty}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \ .$$

また，

$$\int_{-\infty}^{a} g(y)\,dy = \int_0^a g(y)\,dy = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f(x)\,dx = \mathrm{P}(\,-\sqrt{a}\le X\le\sqrt{a}\,) \ ;$$

ここで

$$X^2 \le a \iff -\sqrt{a} \le X \le \sqrt{a}$$

より $\mathrm{P}(\,-\sqrt{a}\le X\le\sqrt{a}\,)=\mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big)$ なので，

$$\int_{-\infty}^{a} g(y)\,dy = \mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big) \ .$$

実数 $a$ について $a\le 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{a} g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{a} 0\,dy = 0 = \mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big) \ .$$

故に，任意の実数 $a$ について $\mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big)=\int_{-\infty}^{a} g(y)\,dy$ ． つまり関数 $g(y)$ は確率変数 $X^2$ の確率密度関数である． 従って確率変数 $X^2$ は連続型確率変数である．

（証明終り）

**定理** 2. 補遺 1.4　変数 $X$ が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が $X$ の確率密度関数であるとき，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$ が収束するならば，確率変数 $X^2$ の平均値は $\mathrm{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$ ．

**証明**　関数 $f(x)$ は連続型確率変数 $X$ の確率密度関数であるとする． 補助定理 2. 補遺 1.3 より，確率変数 $X^2$ の確率密度関数は次のような関数 $g(y)$ で与えられる：

$$g(y) = \begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\} & (\ y>0\ \text{のとき}) \\ 0 & (\ y\le 0\ \text{のとき})\end{cases} \ .$$

$Y=X^2$ とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^2]=\mathrm{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y\,g(y)\,dy = \int_0^\infty y\frac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}dy \\ &= \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}dy \ .\end{aligned} \tag{1}$$

$x=\sqrt{y}$ とおく． $y=x^2$ ． $\dfrac{dy}{dx}=2x$ より $dy=2x\,dx$ ．

$$\begin{aligned}\int_0^u \frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}dy &= \int_0^{\sqrt{u}}\frac{x}{2}\{f(x)+f(-x)\}\,2x\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{u}} x^2\{f(x)+f(-x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{u}} x^2 f(x)\,dx + \int_0^{\sqrt{u}} x^2 f(-x)\,dx \ .\end{aligned} \tag{2}$$

$t=-x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{u}} x^2 f(-x)\,dx &= \int_0^{-\sqrt{u}}(-t)^2 f(t)\,(-dt) = -\int_0^{-\sqrt{u}} x^2 f(t)\,dt = \int_{-\sqrt{u}}^{0} x^2 f(t)\,dt \\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{0} x^2 f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{u}} x^2 f(x)\,dx + \int_0^{\sqrt{u}} x^2 f(-x)\,dx &= \int_0^{\sqrt{u}} x^2 f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{u}}^{0} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} x^2 f(x)\,dx \ .\end{aligned} \tag{3}$$

等式 (2) と (3) とより $\int_0^u \dfrac{\sqrt{y}}{2}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}dy=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} x^2 f(x)\,dx$ なので，

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\big\}dy &= \lim_{u\to\infty}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

等式 (1) とこの等式とより $\mathrm{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$ ．（証明終り）

**定理** 2.4.1　関数 $f(x)$ が確率変数 $X$ の確率密度関数であるとき，$X$ の平均値を $\mu$ とおくと

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx \ .$$

**証明**　関数 $f(x)$ は確率変数 $X$ の確率密度関数であるとする．

定理 2. 補遺 1.1 より確率変数 $X-\mu$ の確率密度関数は $f(x+\mu)$ なので，定理 2. 補遺 1.4 より，

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x+\mu)\,dx = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2 f(x+\mu)\,dx \ .$$

変数 $t$ を $t=x+\mu$ とおく．

$$\int_u^v x^2 f(x+\mu)\,dx = \int_{u+\mu}^{v-c}(v+\mu)^2 f(t)\,dt \ .$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2 f(x+\mu)\,dx &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u+\mu}^{v+\mu}(t-\mu)^2 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2 f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

故に $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$ ．（証明終り）

**定理** 2. 補遺 1.5　確率変数 $X$ 及び定数 $c$ に対して，

$$\mathrm{E}[(X+c)^2] = \mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2 \ .$$

**証明**　確率変数 $X$ が連続型確率変数である場合を証明する． 関数 $f(x)$ は $X$ の確率密度関数であるとする．

定理 2. 補遺 1.1 より確率変数 $X+c$ の確率密度関数は $f(x-c)$ なので，定理 2. 補遺 1.4 より，

$$\mathrm{E}[(X+c)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x-c)\,dx = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2 f(x-c)\,dx \ . \tag{1}$$

変数 $t$ を $t=x-c$ とおく．

$$\begin{aligned}\int_u^v x^2 f(x-c)\,dx &= \int_{u-c}^{v-c}(t+c)^2 f(t)\,dt = \int_{u-c}^{v-c}(t^2+2ct+c^2)f(t)\,dt \\ &= \int_{u-c}^{v-c} t^2 f(t)\,dt + 2c\int_{u-c}^{v-c} t\,f(t)\,dt + c^2\int_{u-c}^{v-c} f(t)\,dt .\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2 f(x-c)\,dx \\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c} t^2 f(t)\,dt + 2c\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c} t,f(t)\,dt + c^2\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt + 2c\int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)\,dt + c^2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \ .\end{aligned} \tag{2}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt=\mathrm{E}[X^2]$ ， $\int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)\,dt=\mathrm{E}[X]$ ， $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=1$ なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt + 2c\int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)\,dt + c^2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2 \ . \tag{3}$$

等式 (1), (2), (3) より $\mathrm{E}[(X+c)^2]=\mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2$ ．（証明終り）

**定理** 2.4.2　確率変数 $X$ の分散 $\mathrm{V}[X]$ があるならば， 定数 $c$ に対して， $\mathrm{V}[X+c]=\mathrm{V}[X]$ ， $\sigma[X+c]=\sigma[X]$ ．

**証明**　定理 2.4.1 と定理 2. 補遺 1.5 とより，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[X+c] &= \mathrm{E}[(X+c)^2]-\{\mathrm{E}[X+c]\}^2 = \mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2-\{\mathrm{E}[X]+c\}^2 \\ &= \mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2-\{\mathrm{E}[X]^2-2c\,\mathrm{E}[X]+c^2\}^2 = \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2 \\ &= \mathrm{V}[X] \ .\end{aligned}$$

更にこのことより，

$$\sigma[X+c] = \sqrt{\mathrm{V}[X+c]} = \sqrt{\mathrm{V}[X]} = \sigma[X] \ .$$

（証明終り）

**定理** 2.4.3　確率変数 $X$ の分散 $\mathrm{V}[X]$ があるならば， 定数 $k$ に対して， $\mathrm{V}[kX]=k^2\,\mathrm{V}[X]$ ， $\sigma[kX]=|k|\,\sigma[X]$ ．

**証明**　定理 2.4.1 と定理 2.3.2 とより，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[kX] &= \mathrm{E}[(kX)^2]-\{\mathrm{E}[kX]\}^2 = \mathrm{E}[k^2X^2]-\{k\,\mathrm{E}[X]\}^2 \\ &= k^2\,\mathrm{E}[X^2]-k^2\,\mathrm{E}[X]^2 = k^2\{\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2\} \\ &= k^2\,\mathrm{V}[X] \ .\end{aligned}$$

更にこのことより，

$$\sigma[kX] = \sqrt{\mathrm{V}[kX]} = \sqrt{k^2\,\mathrm{V}[X]} = \sqrt{k^2}\sqrt{\mathrm{V}[X]} = |k|\,\sigma[X] \ .$$

（証明終り）

**定理** 2.4.4　確率変数 $X$ の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と確率変数 $X^2$ の平均値 $\mathrm{E}[X^2]$ とがあるならば，$X$ の分散 $\mathrm{V}[X]$ は $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2$ ．

**証明**　$\mu=\mathrm{E}[X]$ とおく． 定理 2. 補遺 1.5 より，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(X-\mu)^2] &= \mathrm{E}[X^2]-2\mu\,\mathrm{E}[X]+\mu^2 = \mathrm{E}[X^2]-2\mu\mu+\mu^2 = \mathrm{E}[X^2]-\mu^2 \\ &= \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2 \ .\end{aligned}$$

（証明終り）