第2章の補遺2　チェビシェフの不等式

　正の実数 K に対して，確率変数 X の値が定数 μ より K 以上離れるということを式で表すと $|X-\mu| \geq K$ となります：

$$|X-\mu| \geq K \iff X-\mu \leq -K \text{ または } X-\mu \geq K$$
$$\iff X \leq \mu - K \text{ または } X \geq \mu + K \ .$$

このようになる確率の値の範囲を制限することができます.

定理（チェビシェフの不等式）　確率変数 X の平均値が μ で標準偏差が σ であるとき，任意の正の実数 K に対して

$$\mathrm{P}(\,|X-\mu| \geq K\,) \leq \frac{\sigma^2}{K^2} \ .$$

証明　確率変数 X が連続型確率変数であるときを扱う.

　確率変数 Y を $Y = X - \mu$ とおく．この確率変数 Y の確率密度関数を $g(x)$ とおく．定理 2. 補遺 1.4 より，

$$\sigma^2 = \mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y)\,dy + \int_{-K}^{K} y^2 g(y)\,dy + \int_{K}^{\infty} y^2 g(y)\,dy \ ;$$

$y^2 g(y) \geq 0$ より $\int_{-K}^{K} y^2 g(y)\,dy \geq 0$ なので,

$$\int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y)\,dy + \int_{-K}^{K} y^2 g(y)\,dy + \int_{K}^{\infty} y^2 g(y)\,dy \geq \int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y)\,dy + \int_{K}^{\infty} y^2 g(y)\,dy \ ;$$

$y \geq K$ のときも $y \leq -K$ のときも $y^2 \geq K^2$ なので,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y)\,dy + \int_{K}^{\infty} y^2 g(y)\,dy &\geq \int_{-\infty}^{-K} K^2 g(y)\,dy + \int_{K}^{\infty} K^2 g(y)\,dy \\
&= K^2 \int_{-\infty}^{-K} g(y)\,dy + K^2 \int_{K}^{\infty} g(y)\,dy \\
&= K^2\,\mathrm{P}(\,Y \leq -K\,) + K^2\,\mathrm{P}(\,Y \geq K\,) \\
&= K^2\{\mathrm{P}(\,Y \leq -K\,) + \mathrm{P}(\,Y \geq K\,)\} \\
&= K^2\,\mathrm{P}(\,|Y| \geq K\,) \\
&= K^2\,\mathrm{P}(\,|X-\mu| \geq K\,) \ .
\end{aligned}$$

よって $\mathrm{P}(\,|X-\mu| \geq K\,) \leq \dfrac{\sigma^2}{K^2}$.　　（証明終り）