§3.2　ポアソン分布

以下では e は自然対数の底を表します：

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\cdots \ .$$

指数関数 e^x のマクローリン展開すると次のようになります：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ .$$

正の実数 λ について，$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ ですから，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1 \ .$$

このことより，次のような確率変数 X を考えることができます：X のとり得る値は自然数 $k=0,1,2,3,\ldots$ であり，$\mathrm{P}(\ X=k\ ) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ ．このとき，

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\ X=k\ ) = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = 1 \ .$$

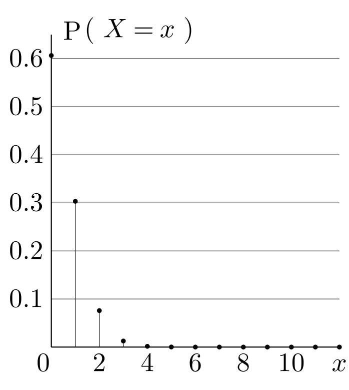
従って変数 X は離散型確率変数です.

定義　定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．確率変数 X がポアソン分布 (Poisson distribution) $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとは，X がとり得る値が自然数 $0,1,2,3,\ldots$ であり，各自然数 $k=0,1,2,3,\ldots$ に対して

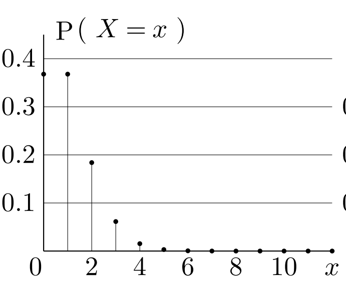
$$\mathrm{P}(\ X=k\ ) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

となることである.

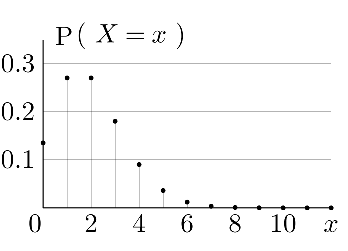
ポアソン分布に従う確率変数 X について，実数 x に対する確率 $\mathrm{P}(\ X=x\ )$ のグラフは次のようになります.



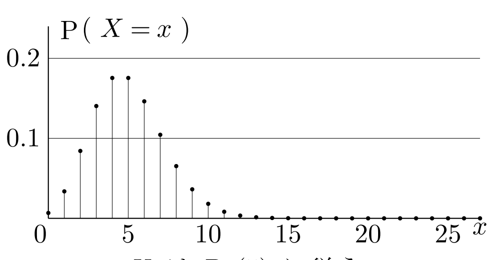
X は $\mathrm{Po}(0.5)$ に従う



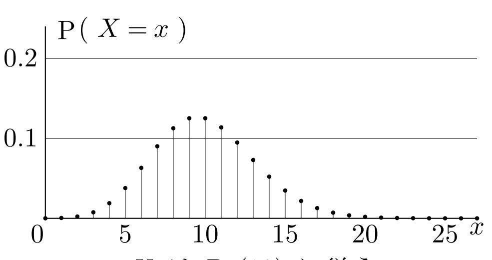
X は $\mathrm{Po}(1)$ に従う



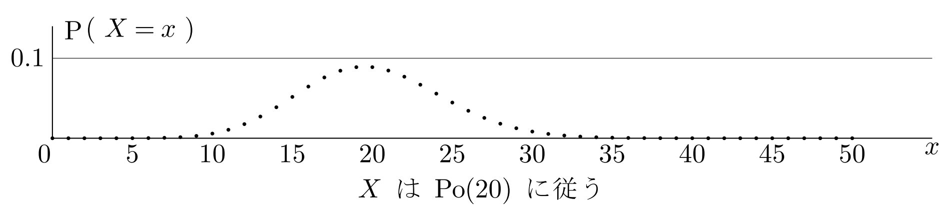
X は $\mathrm{Po}(2)$ に従う



X は $\mathrm{Po}(5)$ に従う



X は $\mathrm{Po}(10)$ に従う



X は $\mathrm{Po}(20)$ に従う

次の定理が成り立ちます．その証明は後にします.

定理 3.2.1　変数 n は正の整数で変数 p は実数とする．定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．$np = \lambda$ として $n \to \infty$ ，$p \to +0$ とするとき，2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に収束する．つまり，確率変数 X が $\mathrm{B}(n,p)$ に従い確率変数 Y が $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき，$pn = \lambda$ として $n \to \infty$ ，$p \to +0$ とすると，自然数 k に対して

$$\mathrm{P}(\ X=k\ ) = {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{P}(\ Y=k\ ) \ .$$

この定理から分かるように，ある条件の下で 2 項分布の極限がポアソン分布になります.

ある町では一日平均 3 件の交通事故が発生するとします．ある日のこの町での交通事故の発生件数を表す変数を X とおきます．この確率変数 X がどのような確率分布に従うか考えます.

充分大きい自然数 n に対して一日を n 等分します．例えば $n = 10000$ のとき，一日の n 分の一は 8.64 秒のごく短い時間です．一日平均 3 件しか起こらないような事ですから，この短い時間に事故が 2 件以上発生する確率は無視します．一日平均 3 件の交通事故が発生するので，一日を n 等分したときの n 個の小区間のうち平均的に 3 個の割合で事故が発生します．よって，一日を n 等分したときの各小区間において事故が起きる確率は $\frac{3}{n}$ です．一日間では事故が起きる確率が $\frac{3}{n}$ である小期間が n 回あるので，一日の事故の数を表す確率変数 X は近似的に 2 項分布 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{n}\right)$ に従います．分割の数 n を大きくしていくとこの近似は次第に正確になると考えられます．定理 3.2.1 より，$n \to \infty$ とするとき 2 項分布 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{n}\right)$ の極限はポアソン分布 $\mathrm{Po}(3)$ です．故に，一日の事故の数を表す確率変数 X はポアソン分布 $\mathrm{Po}(3)$ に従うと考えられます.

一般的に，偶発的にときどき起こる事件について，ある長さの時間のうちにその事件が起きる回数を表す確率変数はポアソン分布に従うものと考えられています．例えば，あまり頻度の多くない出来事が起きる回数，普通の世帯に掛かってくる電話の回数，などはポアソン分布に従うとされています.

ポアソン分布の平均値と分散とは次のようになります．その証明は後にします.

> **定理** 3.2.2　定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うならば，X は離散型確率変数であり，X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ とは，
>
> $$\mathrm{E}[X] = \lambda \ , \qquad \mathrm{V}[X] = \lambda \ .$$

$\boxed{\text{例題 3.2.1}}$　ある都市では平均すると 2 日に 7 件の交通事故が発生するとする．この都市で 1 日に発生する交通事故の件数を表す変数 X はポアソン分布に従う確率変数であるとする．確率 $\mathrm{P}\left(\ X \leq \frac{8}{3}\ \right)$ ，$\mathrm{P}(\ X \geq 2\ )$ を求める.

確率変数 X の平均値は $\frac{7}{2}$ なので，X はポアソン分布 $\mathrm{Po}\left(\frac{7}{2}\right)$ に従う．よって，各自然数 k に対して

$$\mathrm{P}(\ X=k\ ) = e^{-\frac{7}{2}}\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{e^3\sqrt{e}\,k!}\left(\frac{7}{2}\right)^k \ .$$

従って，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\ X \leq \frac{8}{3}\ \right) &= \mathrm{P}(\ X=0\ ) + \mathrm{P}(\ X=1\ ) + \mathrm{P}(\ X=2\ ) \\ &= \frac{1}{e^3\sqrt{e}\,0!}\left(\frac{7}{2}\right)^0 + \frac{1}{e^3\sqrt{e}\,1!}\left(\frac{7}{2}\right)^1 + \frac{1}{e^3\sqrt{e}\,2!}\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{e^3\sqrt{e}}\left(1 + \frac{7}{2} + \frac{49}{8}\right) \\ &= \frac{85}{8e^3\sqrt{e}} \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ X \geq 2\ ) &= 1 - \mathrm{P}(\ X < 2\ ) = 1 - \mathrm{P}(\ X=0\ ) - \mathrm{P}(\ X=1\ ) \\ &= 1 - \frac{1}{e^3\sqrt{e}\,0!}\left(\frac{7}{2}\right)^0 - \frac{1}{e^3\sqrt{e}\,1!}\left(\frac{7}{2}\right)^1 = 1 - \frac{1}{e^3\sqrt{e}}\left(1 + \frac{7}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{9}{2e^3\sqrt{e}} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.1}}$　ある店では平均すると 2ヶ月間に 5 件の万引きが発生するとします．この店で 1ヶ月間に発生する万引きの件数を表す変数 X はポアソン分布に従う確率変数であるとします．確率 $\mathrm{P}\left(\ X \leq \frac{7}{5}\ \right)$ と $\mathrm{P}(\ X \geq 3\ )$ とを求めなさい.

定理 3.2.1 より次のことが分かります：正の整数 n が充分大きくて正の実数 p が 0 に近いとき，2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(np)$ で近似できる.

$\boxed{\text{例題 3.2.2}}$　ある生産ラインで生産される製品のうち，平均すると $\frac{1}{200}$ が不良品であるとする．この生産ラインで生産される製品を無作為に 1000 個取り出したとき，1000 個の製品の中に含まれる不良品の個数を変数 X で表す．確率変数 X は近似的にポアソン分布に従うものとして，実数 x に対する確率 $\mathrm{P}(\ X=x\ )$ の近似式を求める.

X は 2 項分布 $\mathrm{B}\left(1000, \frac{1}{200}\right)$ に従う．この 2 項分布はポアソン分布 $\mathrm{Po}\left(1000 \cdot \frac{1}{200}\right) = \mathrm{Po}(5)$ で近似できる．つまり，X は近似的にポアソン分布 $\mathrm{Po}(5)$ に従う．故に，各自然数 k に対して $\mathrm{P}(\ X=k\ ) \fallingdotseq e^{-5}\frac{5^k}{k!}$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.2}}$　ある都市の人口は 10 万人であるとします．この都市では平均すると 1ヶ月間で 3 万人に 1 人が交通事故で亡くなるものとします．この都市における 1ヶ月間の交通事故死者の数を変数 X で表します．確率変数 X は近似的にポアソン分布に従うものとして，各自然数 k に対する確率 $\mathrm{P}(\ X=k\ )$ の近似式を求めなさい.

——— ポアソン分布に関する定理の証明

定理 3.2.1　変数 n は正の整数で変数 p は実数とする．定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．$pn = \lambda$ として $n \to \infty$ ，$p \to +0$ とするとき，2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に収束する．つまり，確率変数 X が $\mathrm{B}(n,p)$ に従い確率変数 Y が $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき，$pn = \lambda$ として $n \to \infty$ ，$p \to +0$ とすると，自然数 k に対して

$$\mathrm{P}(\ X=k\ ) = {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{P}(\ Y=k\ ) \ .$$

証明　確率変数 X が $\mathrm{B}(n,p)$ に従い確率変数 Y が $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする．$pn = \lambda$ とする．$p = \frac{\lambda}{n}$ ，$n = \frac{\lambda}{p}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ X=k\ ) &= {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k (1-p)^n (1-p)^{-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\{1+(-p)\}^{\frac{\lambda}{p}}(1-p)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\{1+(-p)\}^{\frac{-\lambda}{-p}}(1-p)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}(-\lambda)}(1-p)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\left[\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda}(1-p)^{-k} \ .\end{aligned}$$

$n \to \infty$ ，$p \to +0$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \ , \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = 1 \ , \qquad \cdots \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k+1}{n}\right) = 1 \ .$$

また，

$$\lim_{p\to+0}(1-p)^{-k} = 1^{-k} = 1 \ .$$

更に，$t = -p$ とおくと，$p \to +0$ のとき $t \to -0$ なので，

$$\lim_{p\to+0}\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}} = \lim_{t\to-0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \ ,$$

従って

$$\lim_{p\to+0}\left[\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda} = \left[\lim_{p\to+0}\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda} \ .$$

故に，$n \to \infty$ ，$p \to +0$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ X=k\ ) &= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\left[\{1+(-p)\}^{\frac{1}{-p}}\right]^{-\lambda}(1-p)^{-k} \\ &\to \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot e^{-\lambda}\cdot 1 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathrm{P}(\ Y=k\ ) \ .\end{aligned}$$

（証明終り）

定理 3.2.2　定数 λ は実数で $\lambda > 0$ とする．確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとき，$\mathrm{E}[X] = \lambda$ ，$\mathrm{V}[X] = \lambda$.

証明　確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うとする．X が取り得る値は自然数 $k = 0,1,2,3,4,\ldots$ であり，$\mathrm{P}(\ X=k\ ) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty}\{k\,\mathrm{P}(\ X=k\ )\} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{k\,\mathrm{P}(\ X=k\ )\} = \sum_{k=1}^{\infty}\{k\,\mathrm{P}(\ X=k\ )\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda\lambda^k}{k!}\right) \\ &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) \ ,\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = 1$ なので $\mathrm{E}[X] = \lambda$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\{k(k-1)\,\mathrm{P}(\ X=k\ )\} = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{\infty}\{k(k-1)\,\mathrm{P}(\ X=k\ )\} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\{k(k-1)\,\mathrm{P}(\ X=k\ )\} = \sum_{k=2}^{\infty}\left\{k(k-1)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right\} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\left\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+2}}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^2\lambda^k}{k!}\right) \\ &= \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) \ .\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = 1$ なので，

$$\mathrm{E}[X(X-1)] = \lambda^2 \ .$$

左辺は $\mathrm{E}[X(X-1)] = \mathrm{E}[X^2 - X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \lambda$ なので，$\mathrm{E}[X^2] - \lambda = \lambda^2$ ，$\mathrm{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$ ．定理 2.4.4 より，

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \ .$$

（証明終り）