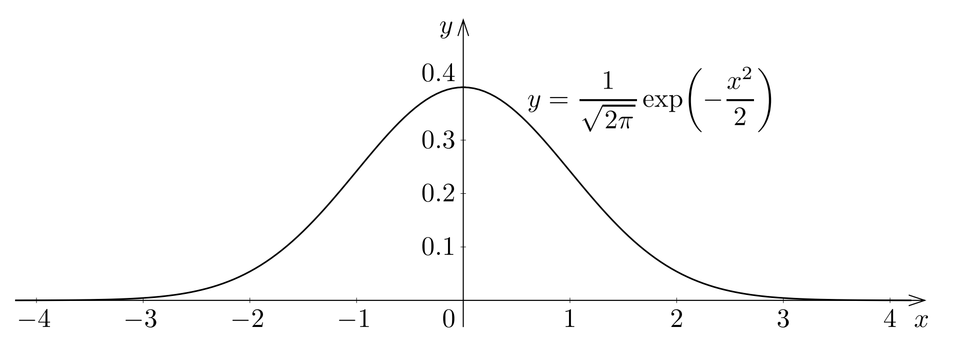
§3.5　正規分布に関する確率の計算

前節で述べたように，平均値が 0 で分散が 1 である正規分布 N(0,1) を標準正規分布といいます．その確率密度関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ のグラフは次のようになります．

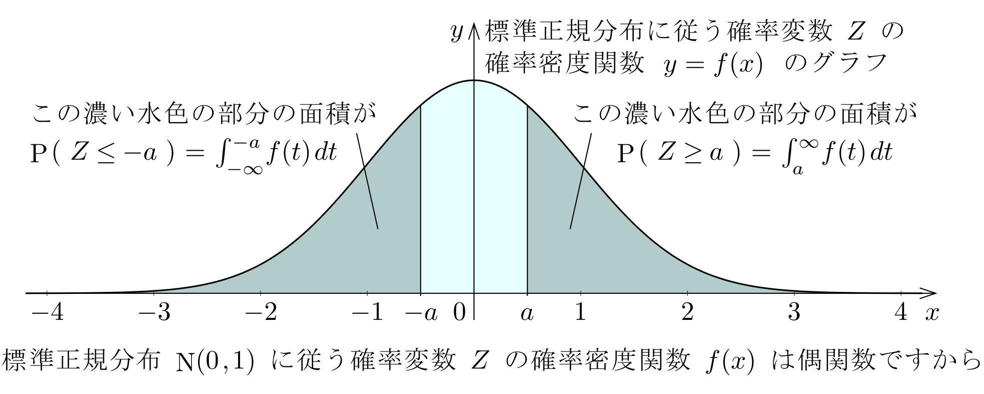


標準正規分布 N(0,1) の確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ は偶関数です：任意の実数 x について

$$f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(-x)^2}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)=f(x)\ .$$

定理 3.5.1　標準正規分布 N(0,1) の確率密度関数は偶関数である．

標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z の確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ 及び任意の実数 a について次のようになります．



標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z の確率密度関数 $f(x)$ は偶関数ですから，任意の実数 a について，

$$\mathrm{P}(\ Z\le -a\ )=\int_{-\infty}^{-a}f(t)\,dt=\int_{a}^{\infty}f(t)\,dt=\mathrm{P}(\ Z\ge a\ )\ ,$$

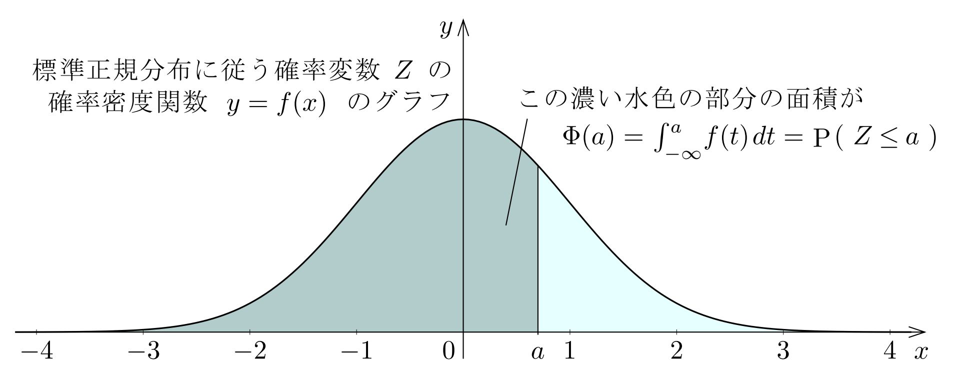
更に

$$\mathrm{P}(\ Z\ge -a\ )=\mathrm{P}(\ Z\le -(-a)\ )=\mathrm{P}(\ Z\le a\ )\ .$$

正規分布に従う確率変数に関する確率の計算を考えます．標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおきます．N(0,1) の確率密度関数は $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ ですから，

$$\Phi(x)=\mathrm{P}(\ Z\le x\ )=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\ .$$

標準正規分布の確率密度関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて累積分布関数 $\Phi(x)$ の図形的意味は次のようになります．



標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x)=\mathrm{P}(\ Z\le x\ )$ について以下のことが成り立ちます：任意の実数 a に対して，

$$\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=\Phi(a)=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\ ,$$

$$\mathrm{P}(\ Z\ge a\ )=1-\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=1-\Phi(a)\ ;$$

更にこれらのことより，

$$\Phi(-a)=\mathrm{P}(\ Z\le -a\ )=\mathrm{P}(\ Z\ge a\ )=1-\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=1-\Phi(a)\ ;$$

任意の実数 a,b について，$a\le b$ のとき，

$$\mathrm{P}(\ a\le Z\le b\ )=\mathrm{P}(\ Z\le b\ )-\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=\Phi(b)-\Phi(a)\ .$$

これらの結果をまとめます．

> 定理 3.5.2　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく：
>
> $$\Phi(x)=\mathrm{P}(\ Z\le x\ )=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\ .$$
>
> 各実数 a に対して，$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$ であり，
>
> $$\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=\Phi(a)\ ,$$
> $$\mathrm{P}(\ Z\ge a\ )=1-\Phi(a)\ .$$
>
> 各実数 a,b に対して，$a\le b$ のとき
>
> $$\mathrm{P}(\ a\le Z\le b\ )=\Phi(b)-\Phi(a)\ .$$

標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数 $\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ の積分の計算は普通には無理なので，$\Phi(x)$ の値は計算機を用いた数値計算によって近似値が計算されて数値表にまとめられています．標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数の近似値の表を正規分布表といいます．正規分布表には，通常，0 以上の実数に対する標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数の近似値が記載されています．

上述の公式と正規分布表とを用いて，標準正規分布 N(0,1) に関する確率を計算します．

$\boxed{\text{例題 3.5.1}}$　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z について，確率 $\mathrm{P}(\ Z\le 1.23\ )$，$\mathrm{P}(\ Z\ge 0.97\ )$，$\mathrm{P}(\ Z\le -0.25\ )$，$\mathrm{P}(\ Z\ge -2.17\ )$，$\mathrm{P}(\ -0.73\le Z\le 1.46\ )$ を求める．

標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$\mathrm{P}(\ Z\le 1.23\ )=\Phi(1.23)\fallingdotseq 0.8907\ .$$

$$\mathrm{P}(\ Z\ge 0.97\ )=1-\mathrm{P}(\ Z\le 0.97\ )=1-\Phi(0.97)\fallingdotseq 1-0.8340=0.1660\ .$$

$$\mathrm{P}(\ Z\le -0.25\ )=\Phi(-0.25)=1-\Phi(0.25)\fallingdotseq 1-0.5987=0.4013\ .$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ Z\ge -2.17\ )&=1-\mathrm{P}(\ Z\le -2.17\ )=1-\Phi(-2.17)=1-\{1-\Phi(2.17)\}=\Phi(2.17)\\&\fallingdotseq 0.9850\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ -0.73\le Z\le 1.46\ )&=\Phi(1.46)-\Phi(-0.73)=\Phi(1.46)-\{1-\Phi(0.73)\}\\&=\Phi(1.46)+\Phi(0.73)-1\fallingdotseq 0.9279+0.7673-1\\&=0.6952\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 3.5.1}}$　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z について，確率 $\mathrm{P}(\ Z\le 1.74\ )$，$\mathrm{P}(\ Z\ge 0.79\ )$，$\mathrm{P}(\ Z\le -2.13\ )$，$\mathrm{P}(\ Z\ge -1.36\ )$，$\mathrm{P}(\ -0.87\le Z\le 1.28\ )$ を求めなさい．

標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数 $\Phi(x)$ の逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ を使うこともあります．逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ の値を求めるためには正規分布表を逆に引きます．

$\boxed{\text{例題 3.5.2}}$　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z に対して，$\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=0.975$ となる実数 a を求める．

標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．$\mathrm{P}(\ Z\le a\ )=0.975$ より $\Phi(a)=0.975$，従って $a=\Phi^{-1}(0.975)\fallingdotseq 1.96$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例題 3.5.3}}$　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z に対して，$\mathrm{P}(\ Z\le b\ )=0.305$ となる実数 b を求める．

標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．$\mathrm{P}(\ Z\le b\ )=0.305$ より，$\Phi(b)=0.305$，$\Phi(-b)=1-\Phi(b)=1-0.305=0.695$，$-b\fallingdotseq\Phi^{-1}(0.695)\fallingdotseq 0.51$，$b\fallingdotseq -0.51$ ．

$\boxed{\text{例題 3.5.4}}$　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z に対して，$\mathrm{P}(\ Z\ge c\ )=0.67$ となる実数 c を求める．

標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．$\mathrm{P}(\ Z\ge c\ )=0.67$ より

$$\Phi(-c)=1-\Phi(c)=1-\mathrm{P}(\ Z\le c\ )=\mathrm{P}(\ Z\ge c\ )=0.67\ ,$$
$$-c=\Phi^{-1}(0.67)\fallingdotseq 0.44\ ,$$

よって $c\fallingdotseq -0.44$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 3.5.2}}$　標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数 Z に対して，$\mathrm{P}(\ Z\ge a\ )=0.166$ となる実数 a 及び $\mathrm{P}(\ Z\le b\ )=0.063$ となる実数 b を求めなさい．

標準正規分布でない正規分布に関する確率を計算するには，前節の定理 3.4.3 を用いて，標準正規分布に関する確率に変換します．

定数 μ,σ は実数で $\sigma>0$ とします．正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおきます：

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\ .$$

定理 3.4.3 より，Z は標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数です．標準正規分布 N(0,1) の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおきます：$\Phi(x)=\mathrm{P}(\ X\le x\ )$ ．$\sigma>0$ なので，定数 a に対して，

$$X\le a\iff X-\mu\le a-\mu\iff\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{a-\mu}{\sigma}\iff Z\le\frac{a-\mu}{\sigma}\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\ X\le a\ )=\mathrm{P}\left(\ Z\le\frac{a-\mu}{\sigma}\ \right)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\ .$$

$\sigma>0$ なので，定数 a に対して，

$$X\ge a\iff X-\mu\ge a-\mu\iff\frac{X-\mu}{\sigma}\ge\frac{a-\mu}{\sigma}\iff Z\ge\frac{a-\mu}{\sigma}\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\ X\ge a\ )=\mathrm{P}\left(\ Z\ge\frac{a-\mu}{\sigma}\ \right)=1-\mathrm{P}\left(\ Z\le\frac{a-\mu}{\sigma}\ \right)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\ .$$

$\sigma>0$ なので，定数 a,b に対して，

$$a\le X\le b\iff\frac{a-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma}\iff\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\ ,$$

よって，$a\le b$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ a\le X\le b\ )&=\mathrm{P}\left(\ \frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\ \right)=\mathrm{P}\left(\ Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\ \right)-\mathrm{P}\left(\ Z\le\frac{a-\mu}{\sigma}\ \right)\\&=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\ .\end{aligned}$$

このように，正規分布に従う確率変数 X に関する確率が標準正規分布に従う確率変数 Z に関する確率に変換できます．

$\boxed{\text{例題 3.5.3}}$　正規分布 N(70,25) に従う確率変数 X について，確率 $\mathrm{P}(\ X\ge 73\ )$，$\mathrm{P}(\ X\ge 62\ )$，$\mathrm{P}(\ 66\le X\le 77\ )$ を求める．

正規分布 N(70,25) に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z=\frac{X-70}{\sqrt{25}}=\frac{X-70}{5}$$

は標準正規分布 N(0,1) に従う．標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$X\ge 73\iff\frac{X-70}{5}\ge\frac{73-70}{5}\iff Z\ge 0.6\ ;$$

$\Phi(0.6)\fallingdotseq 0.2743$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ X\ge 73\ )&=\mathrm{P}(\ Z\ge 0.6\ )=1-\mathrm{P}(\ Z\le 0.6\ )=1-\Phi(0.6)\fallingdotseq 1-0.7257\\&=0.2743\ .\end{aligned}$$

また，

$$X\ge 62\iff\frac{X-70}{5}\ge\frac{62-70}{5}\iff Z\ge -1.6\ ;$$

$\Phi(1.6)\fallingdotseq 0.9452$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ X\ge 62\ )&=\mathrm{P}(\ Z\ge -1.6\ )=1-\mathrm{P}(\ Z\le -1.6\ )\\&=1-\Phi(-1.6)=1-\big\{1-\Phi(1.6)\big\}=\Phi(1.6)\\&\fallingdotseq 0.9452\ .\end{aligned}$$

更に，

$$66\le X\le 77\iff\frac{66-70}{5}\le\frac{X-70}{5}\le\frac{77-70}{5}\iff -0.8\le Z\le 1.4\ ;$$

$\Phi(1.4)\fallingdotseq 0.9192$，$\Phi(0.8)\fallingdotseq 0.7881$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\ 67\le X\le 77\ )&=\mathrm{P}(\ -0.8\le Z\le 1.4\ )=\Phi(1.4)-\Phi(-0.8)=\Phi(1.4)-\{1-\Phi(0.8)\}\\&=\Phi(1.4)+\Phi(0.8)-1\fallingdotseq 0.9192+0.7881-1\\&=0.7073\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 3.5.3}}$　正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとします．確率 $\mathrm{P}(\ X\ge 58\ )$，$\mathrm{P}(\ X\ge 50\ )$，$\mathrm{P}(\ 46\le X\le 56\ )$ を求めなさい．

ある量を表す変数が確率変数で確率分布 $\mathcal{P}$ に従うとき，その量は確率分布 $\mathcal{P}$ に従うといいます．

$\boxed{\text{例題 3.5.4}}$　全国の 19 歳男子の身長（単位は cm ）は正規分布に従うものとする．19 歳男子の身長の平均値は 171cm で標準偏差は 6cm とする．19 歳男子について，背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める．

全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm ）を表す変数を X とおく．$\mathrm{P}(\ X\ge a\ )=10\%$ となる実数 a を求めればよい．正規分布 $\mathrm{N}(167,6^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z=\dfrac{X-171}{6}$ は標準正規分布 N(0,1) に従う．標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$X\ge a\iff\frac{X-171}{6}\ge\frac{a-171}{6}\iff Z\ge\frac{a-171}{6}\ ;$$

よって

$$\mathrm{P}(\ X\ge a\ )=\mathrm{P}\left(\ Z\ge\frac{a-171}{6}\ \right)=1-\mathrm{P}\left(\ Z\le\frac{a-171}{6}\ \right)=1-\Phi\left(\frac{a-171}{6}\right)\ .$$

$\mathrm{P}(\ X\ge a\ )=10\%=0.1$ なので，

$$1-\Phi\left(\frac{a-171}{6}\right)=0.1\ ,$$
$$\Phi\left(\frac{a-171}{6}\right)=1-0.1=0.9\ ,$$
$$\frac{a-171}{6}=\Phi^{-1}(0.9)\fallingdotseq 1.28\ ,$$
$$a\fallingdotseq 1.28\times 6+171=178.68\ .$$

従って，背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長は約 178.7cm である．

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 3.5.4}}$　ある試験の点数は正規分布に従い，平均点が 63 で標準偏差が 11 であったとします．この試験において上位から 20% 以内に入るための最低点を求めなさい．