§7.2　正規分布の平均値の区間推定

確率変数 X が正規分布に従いその標準偏差 $\sigma[X]$ が分かっているとします．$\sigma[X]>0$ とします．実数 α について $0<\alpha<1$ とします．X の実現値 x に対して，X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ の信頼度 α の信頼区間とを求めます．

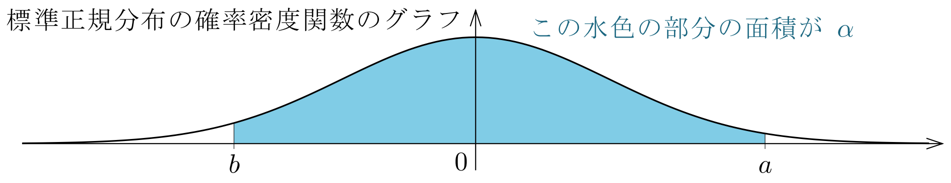
X の平均値を μ とおきます： $\mu=\mathrm{E}[X]$．確率変数 X は正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma[X]^2)$ に従うので，X を標準化した確率変数 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma[X]}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います．標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおきます：

$$\Phi(x)=\mathrm{P}(\,Z\le x\,)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\,.$$

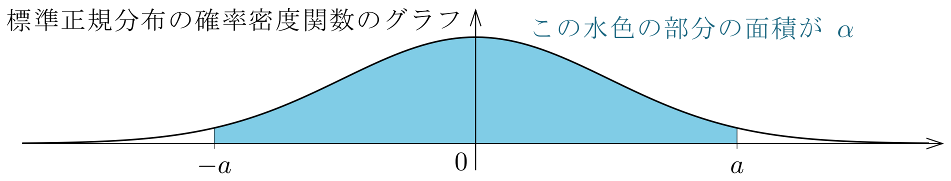
各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\,Z\le a\,)=\Phi(a)\,,$$
$$\Phi(-a)=1-\Phi(a)\,.$$

信頼度 α に対して次のような実数 a,b を考えます： $\mathrm{P}(\,b\le Z\le a\,)=\alpha$．標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の確率密度関数のグラフを考えると下図のようになります．



信頼区間をなるべく狭くするために，$\mathrm{P}(\,b\le Z\le a\,)=\alpha$ である実数 a と b との間隔 $a-b$ をなるべく小さくします．標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の確率密度関数は偶関数なので，$b=-a$ とします．



$\mathrm{P}(\,-a\le Z\le a\,)=\alpha$ である実数 a を求めます．

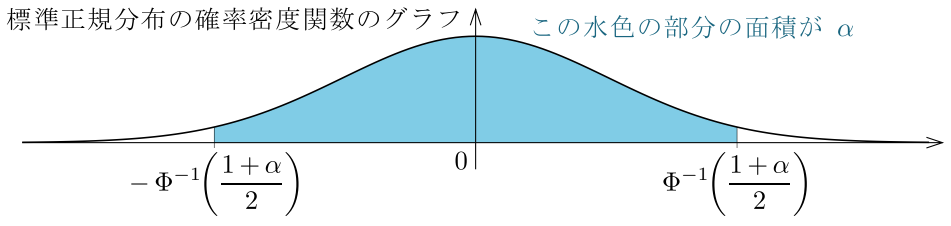
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,-a\le Z\le a\,)&=\mathrm{P}(\,Z\le a\,)-\mathrm{P}(\,Z\le -a\,)=\Phi(a)-\Phi(-a)=\Phi(a)-\{1-\Phi(a)\}\\&=2\Phi(a)-1\,.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,b\le Z\le a\,)=\alpha\iff 2\Phi(a)-1=\alpha&\iff\Phi(a)=\frac{1+\alpha}{2}\\&\iff a=\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

故に

$$\mathrm{P}\left(\,-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le Z\le\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\,\right)=\alpha\,.$$



$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma[X]}$ なので

$$\mathrm{P}\left(\,-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le\frac{X-\mu}{\sigma[X]}\le\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\,\right)=\alpha\,.$$

$\sigma[X]>0$ なので，

$$\begin{aligned}&-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le\frac{X-\mu}{\sigma[X]}\le\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\\\iff&-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le X-\mu\le\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\\\iff&\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\ge\mu-X\ge-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\\\iff&-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le\mu-X\le\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\\\iff&X-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le\mu\le X+\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{P}\left(\,X-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le\mu\le X+\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\,\right)=\alpha\,.$$

このように，確率変数 X について，

$$X-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\le\mu\le X+\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

となる確率は α です．故に，X の実現値 x に対して，区間

$$\left[x-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right),\,x+\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

が $\mu=\mathrm{E}[X]$ の信頼度 α の信頼区間です．

定理 7.2　標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．確率変数 X が正規分布に従いその標準偏差 $\sigma[X]$ が分かるとする．実数 α について $0<\alpha<1$ とする．X の実現値が x であるとき，X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ の信頼度 α の信頼区間は

$$\left[x-\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right),\,x+\sigma[X]\,\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]$$

で与えられる．

よく現われる信頼度 α に対する $\Phi^{-1}\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)$ の値は次のようになります．信頼度が $\alpha=99\%=0.99$ のとき

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)=\Phi^{-1}\left(\frac{1.99}{2}\right)=\Phi^{-1}(0.995)\fallingdotseq 2.576\,.$$

信頼度が $\alpha=95\%=0.95$ のとき

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)=\Phi^{-1}\left(\frac{1.95}{2}\right)=\Phi^{-1}(0.975)\fallingdotseq 1.960\,.$$