§8.2　大標本による母平均の検定

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとします．標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおきます．中心極限定理より導かれた定理5.3より次のことが成り立ちます：

標本平均を表す確率変数 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．

標本調査では母分散 σ^2 の値は普通は分かりませんが，ここでは標本の大きさ n が充分に大きい場合を考えているので，標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて差し支えありません．そこで，普通は母分散 σ^2 を標本の不偏分散 u で近似します．標本平均を表す確率変数 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu, \dfrac{u}{n}\right)$ に従うので，$\overline{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{u}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-\mu\right)$$

は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います．この確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおきます：

$$\Phi(x) = \mathrm{P}(\, Z \leq x \,) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \ .$$

各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\, Z \leq a \,) = \Phi(a) \ ,$$
$$\mathrm{P}(\, Z \geq a \,) = 1 - \mathrm{P}(\, Z \leq a \,) = 1 - \Phi(a) \ ,$$
$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a) \ .$$

与えられた実数 m に対して，仮説　$\mu \neq m$　或いは仮説　$\mu > m$　或いは仮説　$\mu < m$　を検討します．　標本平均を表す確率変数 $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\dfrac{n}{u}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います．しかし，母平均 μ は未知ですから，$Z = \sqrt{\dfrac{n}{u}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできません．そこで，μ を与えられた実数 m で置き換えた確率変数

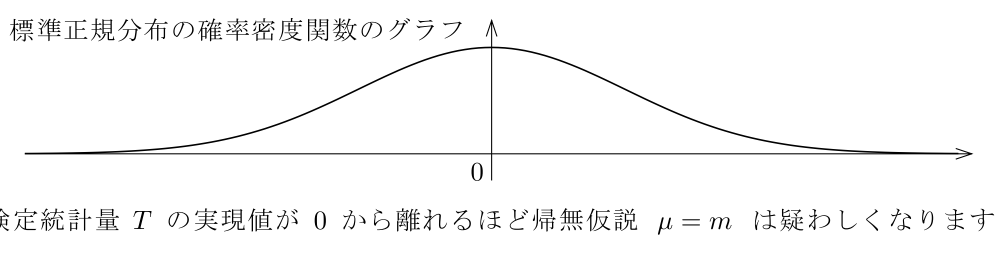
$$T = \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right)$$

を検定統計量とします．0 に近い正の実数 α を有意水準とします．

仮説　$\mu \neq m$　を検討します．　帰無仮説　$\mu = m$　を立てます．　検定統計量 $T = \sqrt{\dfrac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-\mu\right) = \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right) = T \ .$$

よって検定統計量 T は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います．



検定統計量 T の実現値が 0 から離れるほど帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしくなります．そこで，T の実現値と 0 との間の間隔，つまり T の実現値の絶対値が，ある基準値以上のとき帰無仮説を棄却します．その基準値を考えます．帰無仮説 $\mu = m$ より $T = Z$ なので，正の各実数 a について，

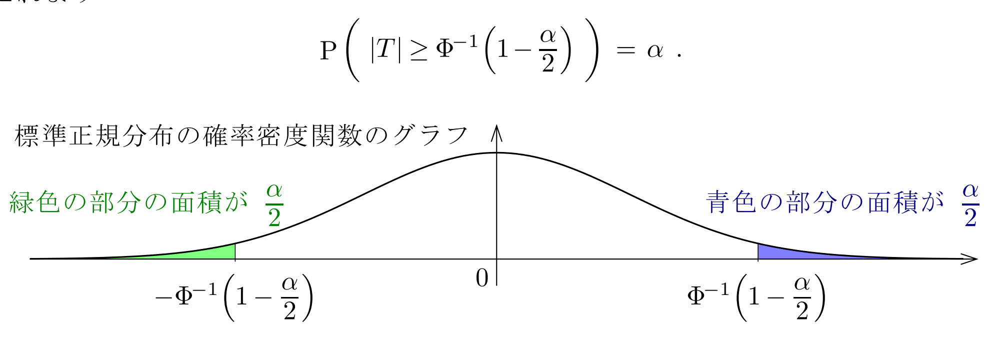
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\, |T| \geq a \,) &= \mathrm{P}(\, |Z| \geq a \,) = \mathrm{P}(\, Z \leq -a \,) + \mathrm{P}(\, Z \geq a \,)\\ &= \Phi(-a) + 1 - \mathrm{P}(\, Z \leq a \,) = 1 - \Phi(a) + 1 - \Phi(a)\\ &= 2 - 2\Phi(a) \ ,\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\, |T| \geq a \,) = \alpha \iff 2 - 2\Phi(a) = \alpha \iff \Phi(a) = 1 - \frac{\alpha}{2}\\ \iff a = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \ .\end{aligned}$$

これより

$$\mathrm{P}\left(\, |T| \geq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \,\right) = \alpha \ .$$



検定統計量 T の実現値 t について，$|t| \geq \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときに限り，つまり $t \leq -\Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ または $t \geq \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu = m$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します．棄却域は区間の合併

$$\left(-\infty, -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

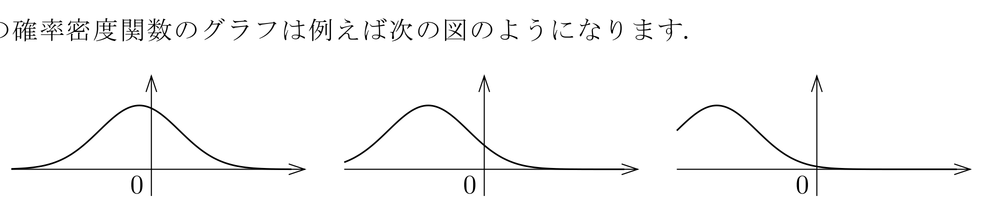
です．このように棄却域が数直線上の左右両側の部分にあるような検定を両側検定といいます．

結局，検定統計量 T の実現値 t について $|t| \geq \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときに限り，有意水準 α の両側検定で，帰無仮説 $\mu = m$ は棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえます．

仮説　$\mu > m$　を検討します．　帰無仮説　$\mu \leq m$　を立てます．　$-\mu \geq -m$ ，$\overline{X}-\mu \geq \overline{X}-m$ ，よって，検定統計量 $T = \sqrt{\dfrac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right) = T \ .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので，$\mathrm{E}[T] \leq \mathrm{E}[Z] = 0$ ．標本統計量 T の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになります．



T の実現値の分布の中心は 0 以下です．T の実現値の分布の中心が 0 よりどれぐらい小さいか分かりませんから，T の実現値が 0 よりいくら小さくても帰無仮説が疑わしいとはいえません．しかし，T の実現値が 0 より大分大きいとき帰無仮説は疑わしいといえます．そこで，T の実現値がある正の基準値以上のとき帰無仮説を棄却します．その基準値を考えます．帰無仮説 $\mu \leq m$ より $Z \geq T$ なので，各実数 a について，$T \geq a$ ならば $Z \geq a$ ，よって

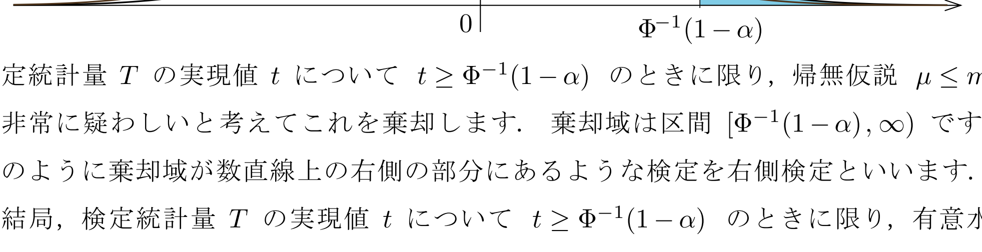
$$\mathrm{P}(\, T \geq a \,) \leq \mathrm{P}(\, Z \geq a \,) \ .$$

$\mathrm{P}(\, Z \geq a \,) = 1 - \mathrm{P}(\, Z \leq a \,) = 1 - \Phi(a)$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\, Z \geq a \,) = \alpha \iff 1 - \Phi(a) = \alpha \iff \Phi(a) = 1 - \alpha\\ \iff a = \Phi^{-1}(1-\alpha) \ .\end{aligned}$$

これより

$$\mathrm{P}\left(\, T \geq \Phi^{-1}(1-\alpha) \,\right) \leq \alpha \ .$$



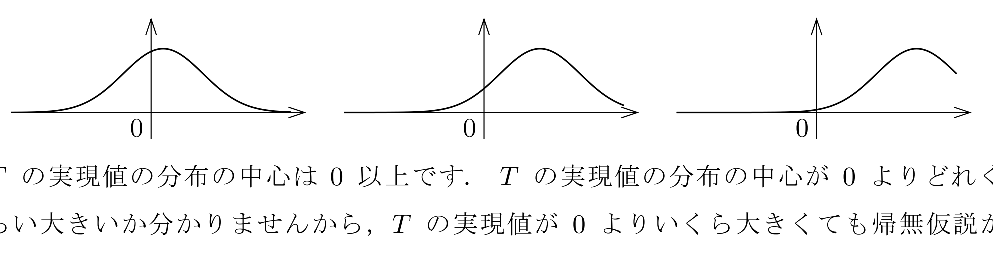
検定統計量 T の実現値 t について $t \geq \Phi^{-1}(1-\alpha)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu \leq m$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します．棄却域は区間 $[\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty)$ です．このように棄却域が数直線上の右側の部分にあるような検定を右側検定といいます．

結局，検定統計量 T の実現値 t について $t \geq \Phi^{-1}(1-\alpha)$ のときに限り，有意水準 α の右側検定で，帰無仮説 $\mu \leq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえます．

仮説　$\mu < m$　を検討します．　帰無仮説　$\mu \geq m$　を立てます．　$-\mu \leq -m$ ，$\overline{X}-\mu \leq \overline{X}-m$ ，よって，検定統計量 $T = \sqrt{\dfrac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq \sqrt{\frac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right) = T \ .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので，$\mathrm{E}[T] \geq \mathrm{E}[Z] = 0$ ．検定統計量 T の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになります．



T の実現値の分布の中心は 0 以上です．T の実現値の分布の中心が 0 よりどれぐらい大きいか分かりませんから，T の実現値が 0 よりいくら大きくても帰無仮説が疑わしいとはいえません．しかし，T の実現値が 0 より大分小さいとき帰無仮説は疑わしいといえます．そこで，T の実現値がある負の基準値以下のとき帰無仮説を棄却します．その基準値を考えます．帰無仮説 $\mu \geq m$ より $Z \leq T$ なので，各実数 a について，$T \leq -a$ ならば $Z \leq -a$ ，よって

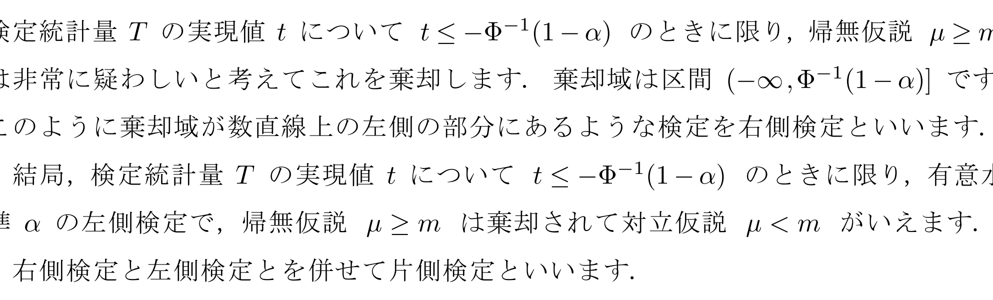
$$\mathrm{P}(\, T \leq -a \,) \leq \mathrm{P}(\, Z \leq -a \,) \ .$$

$\mathrm{P}(\, Z \leq -a \,) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\, Z \leq -a \,) = \alpha \iff 1 - \Phi(a) = \alpha \iff \Phi(a) = 1 - \alpha\\ \iff a = \Phi^{-1}(1-\alpha) \ .\end{aligned}$$

これより

$$\mathrm{P}\left(\, T \leq -\Phi^{-1}(1-\alpha) \,\right) \leq \alpha \ .$$



検定統計量 T の実現値 t について $t \leq -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu \geq m$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します．棄却域は区間 $(-\infty, \Phi^{-1}(1-\alpha)]$ です．このように棄却域が数直線上の左側の部分にあるような検定を右側検定といいます．

結局，検定統計量 T の実現値 t について $t \leq -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ のときに限り，有意水準 α の左側検定で，帰無仮説 $\mu \geq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえます．

右側検定と左側検定とを併せて片側検定といいます．

公式 8.2　標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．実数 α は 0 に近い正の数とする．無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n は充分大きいとする．標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく．未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して，仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき，標本の不偏分散を u として検定統計量 T を $T = \sqrt{\dfrac{n}{u}}\left(\overline{X}-m\right)$ と定めると次のようになる．

(1)　検定統計量 T の実現値 t について $|t| \geq \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ のとき，有意水準 α の両側検定で，帰無仮説 $\mu = m$ は棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる．

(2)　検定統計量 T の実現値 t について $t \geq \Phi^{-1}(1-\alpha)$ のとき，有意水準 α の右側検定で，帰無仮説 $\mu \leq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる．

(3)　検定統計量 T の実現値 t について $t \leq -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ のとき，有意水準 α の左側検定で，帰無仮説 $\mu \geq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえる．

例題 8.2　ある工場で製造された何万個もの製品の中から200個の製品を無作為に抽出して重量を測定すると，200個の製品の重量の平均が 700.3g であり不偏分散が $6\mathrm{g}^2$ であったとする．この工場で製造された製品全体の重量の分散として標本の不偏分散を代用して，この工場で製造された製品全体の重量の平均値は 700g より重いといえるかどうか，有意水準 5% で仮説検定する．

母集団の大きさに対する標本の大きさの比率は充分小さいので，母集団を無限母集団とみなす．この工場で製造された製品全体の重量（単位は g）の平均を μ とおく．標本の大きさは十分大きいので，中心極限定理より標本の重量（単位は g）の平均を表す確率変数 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu, \dfrac{6}{200}\right) = \mathrm{N}\left(\mu, \dfrac{3}{100}\right)$ に従うので，$\overline{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{3}{100}}} = \frac{10}{\sqrt{3}}\left(\overline{X}-\mu\right)$$

は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

母平均 μ について $\mu > 700$ かどうか検討するので，帰無仮説 $\mu \leq 700$ を立てる．検定統計量 T を次のように定める：

$$T = \frac{10}{\sqrt{3}}\left(\overline{X}-700\right) \ .$$

帰無仮説　$\mu \leq 700$　より

$$Z = \frac{10}{\sqrt{3}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq \frac{10}{\sqrt{3}}\left(\overline{X}-700\right) = T \ .$$

確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので $\mathrm{E}[T] \leq \mathrm{E}[Z] = 0$ ．よって，検定統計量 T の実現値が 0 より大きいほど帰無仮説は疑わしいので，右側検定を行う．確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので，

$$\mathrm{P}(\, Z \geq 1.645 \,) = 5\% \ .$$

帰無仮説より $Z \geq T$ なので，$T \geq 1.645$ ならば $Z \geq 1.645$ ，よって

$$\mathrm{P}(\, T \geq 1.645 \,) \leq \mathrm{P}(\, Z \geq 1.645 \,) = 5\% \ .$$

従って，検定統計量 T の実現値 t について $t \geq 1.645$ のとき，有意水準 5% の右側検定 で，帰無仮説 $\mu \leq 700$ は棄却されて対立仮説 $\mu > 700$ がいえる．

いま，確率変数 $\overline{X}$ の実現値が 700.3 なので，検定統計量 $T = \dfrac{10}{\sqrt{3}}\left(\overline{X}-700\right)$ の実現値 t は

$$t = \frac{10}{\sqrt{3}}(700.3 - 700) = \sqrt{3} \fallingdotseq 1.732 \ .$$

$t \geq 1.645$ なので帰無仮説 $\mu \leq 700$ は棄却され，対立仮説 $\mu > 700$ がいえる．つまり，有意水準 5% の右側検定で，この工場で製造された製品全体の重量の平均値は 700g より重いといえる．　終

問題 8.2.1　ある工場で製造された何万個もの製品の中から100個の製品を無作為に抽出して重量を測定すると，100個の製品の重量の平均が 90.5g であり不偏分散が $6\mathrm{g}^2$ であったとします．この工場で製造された製品全体の重量の分散として標本の不偏分散を代用して，この工場で製造された製品全体の重量の平均値は 90g でないといえるかどうか，有意水準 5% で仮説検定しなさい．

問題 8.2.2　ある工場で製造された何万本もの管の中から500本の管を無作為に抽出して長さを測定すると，500本の管の長さの平均が 4.94m であり不偏分散が $0.4\mathrm{m}^2$ であったとします．この工場で製造された管全体の長さの分散として標本の不偏分散を代用して，この工場で製造された管全体の長さの平均値は 5m より短いといえるかどうか，有意水準 1% で仮説検定しなさい．