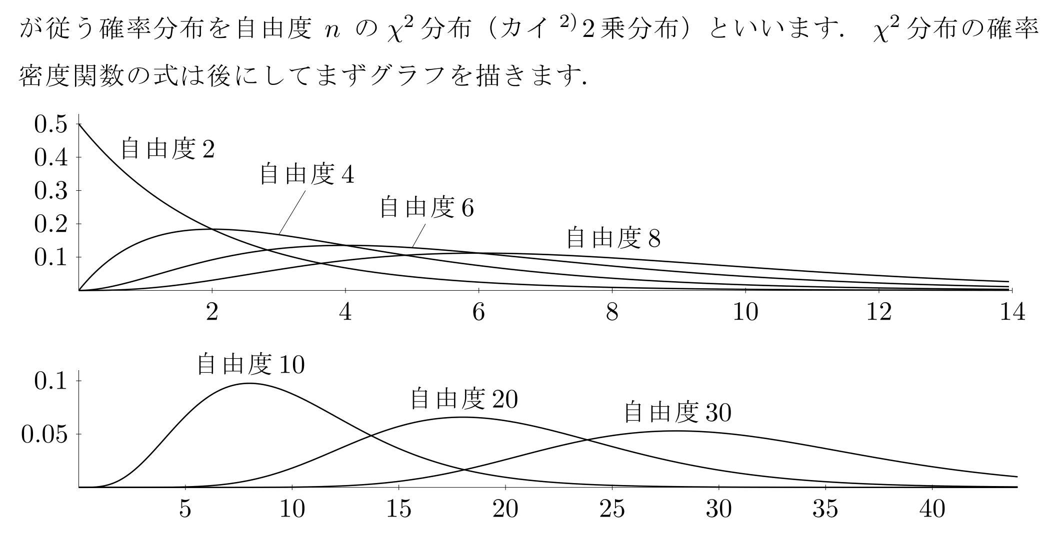
§ 9.1 χ^2 分布

正の自然数 n 及び標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う互いに独立な n 個の確率変数 Z_1, $Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ に対して，確率変数

$$Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+\cdots+Z_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Z_k^2$$

が従う確率分布を自由度 n の χ^2 分布（カイ [2]2 乗分布）といいます． χ^2 分布の確率密度関数の式は後にしてまずグラフを描きます．



χ^2 分布の確率密度関数のグラフ

μ と σ とは定数で $\sigma>0$ とします．2 以上の自然数 n に対して，n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ は正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従い互いに独立であるとします． n 以下の正の自然数 m に対して，m 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ の偏差平方和を表す確率変数を S_m とおきます：

$$S_m = \sum_{k=1}^{m}\left(X_k-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^2 .$$

途中の計算は略しますが次のようになります：

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{(X_1-X_2)^2}{2} = \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 ,\\
S_3-S_2 &= \frac{(X_1+X_2-2X_3)^2}{6} = \left(\frac{X_1+X_2-2X_3}{\sqrt{6}}\right)^2 ,\\
S_4-S_3 &= \frac{(X_1+X_2+X_3-3X_4)^2}{12} = \left(\frac{X_1+X_2+X_3-3X_4}{\sqrt{12}}\right)^2 ,\\
S_5-S_4 &= \frac{(X_1+X_2+X_3+X_4-4X_5)^2}{20} = \left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4-4X_5}{\sqrt{20}}\right)^2 .
\end{aligned}$$

両辺を σ^2 で割ります：

$$\begin{aligned}
\frac{S_2}{\sigma^2} &= \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2 ,\\
\frac{S_3}{\sigma^2}-\frac{S_2}{\sigma^2} &= \left(\frac{X_1+X_2-2X_3}{\sqrt{6}\,\sigma}\right)^2 ,\\
\frac{S_4}{\sigma^2}-\frac{S_3}{\sigma^2} &= \left(\frac{X_1+X_2+X_3-3X_4}{\sqrt{12}\,\sigma}\right)^2 ,\\
\frac{S_5}{\sigma^2}-\frac{S_4}{\sigma^2} &= \left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4-4X_5}{\sqrt{20}\,\sigma}\right)^2 .
\end{aligned}$$

確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 は正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従い互いに独立なので，定理 4.1.2 より以下のことが分かります．

・ 確率変数 X_1-X_2 は正規分布 $\mathrm{N}(0,2\sigma^2)$ に従う；よって確率変数 $Z_1=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

・ 確率変数 X_1+X_2 は正規分布 $\mathrm{N}(2\mu,2\sigma^2)$ に従うので，確率変数 $X_1+X_2-2X_3$ は正規分布 $\mathrm{N}(0,6\sigma^2)$ に従う；よって確率変数 $Z_2=\dfrac{X_1+X_2-2X_3}{\sqrt{6}\,\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

・ 確率変数 $X_1+X_2+X_3$ は正規分布 $\mathrm{N}(3\mu,3\sigma^2)$ に従うので， 確率変数 $X_1+X_2+X_3-3X_4$ は正規分布 $\mathrm{N}(0,12\sigma^2)$ に従う； よって確率変数 $Z_3=\dfrac{X_1+X_2+X_3-3X_4}{\sqrt{12}\,\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

・ 確率変数 $X_1+X_2+X_3+X_4$ は正規分布 $\mathrm{N}(4\mu,4\sigma^2)$ に従うので， 確率変数 $X_1+X_2+X_3+X_4-4X_5$ は正規分布 $\mathrm{N}(0,20\sigma^2)$ に従う； よって確率変数 $Z_4=\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4-4X_5}{\sqrt{20}\,\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

こうして，標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う確率変数 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 について，

$$\frac{S_2}{\sigma^2}=Z_1^2, \qquad \frac{S_3}{\sigma^2}-\frac{S_2}{\sigma^2}=Z_2^2 , \qquad \frac{S_4}{\sigma^2}-\frac{S_3}{\sigma^2}=Z_3^2 , \qquad \frac{S_5}{\sigma^2}-\frac{S_4}{\sigma^2}=Z_4^2 .$$

証明は略しますが確率変数 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 は互いに独立です． ですから以下のことが分かります．

・ $\dfrac{S_2}{\sigma^2}=Z_1^2$ は自由度 1 の χ^2 分布に従う．

・ $\dfrac{S_3}{\sigma^2}=\dfrac{S_2}{\sigma^2}+Z_2^2=Z_1^2+Z_2^2$ は自由度 2 の χ^2 分布に従う．

・ $\dfrac{S_4}{\sigma^2}=\dfrac{S_3}{\sigma^2}+Z_3^2=Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2$ は自由度 3 の χ^2 分布に従う．

・ $\dfrac{S_5}{\sigma^2}=\dfrac{S_4}{\sigma^2}+Z_4^2=Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2$ は自由度 4 の χ^2 分布に従う．

このようにして一般的に次の定理が導かれます．

定理 9.1.1　2 以上の自然数 n に対して n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ は総て同じ正規分布に従い，互いに独立であるとする． それらの標準偏差を σ とおく． X_1, $X_2, X_3, \cdots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 及び偏差平方和を表す確率変数 $S=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$ に対して，確率変数 $\dfrac{S}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．

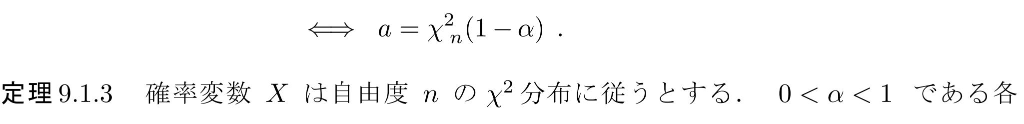
この定理を標本分布に適用します． 母標準偏差が σ（ $\sigma>0$ ）である正規母集団から無作為抽出された大きさ n の標本の標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ は，総て同じ正規分布に従い，互いに独立で，それらの標準偏差は σ です． 前述の定理より，標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 及び X_1, $X_2, X_3, \cdots, X_n$ の偏差平方和を表す確率変数 $S=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$ に対して，確率変数 $\dfrac{S}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従います．

> **定理** 9.1.2　母標準偏差が σ（ $\sigma>0$ ）である正規母集団から無作為抽出した大きさ n の正規標本の偏差平方和を表す確率変数を S とおくと，確率変数 $\dfrac{S}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．

正の自然数 n に対して，確率変数 X は自由度 n の χ^2 分布に従うとします． 証明は略しますが， $0<\alpha<1$ である各実数 α に対して， $\mathrm{P}(\,X\geq k\,)=\alpha$ となる実数 k が唯一つ定まります． この実数 k を，自由度 n の χ^2 分布の上側 α 点といい，$\chi^2{}_n(\alpha)$ と書き表します． つまり次のことが成り立ちます： $0<\alpha<1$ である各実数 α 及び各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\,X\geq a\,)=\alpha \iff a=\chi^2{}_n(\alpha) .$$

χ^2 分布の確率密度関数のグラフを考えると次の図のようになります．



自由度 n の χ^2 分布の上側 α 点

更に， $0<\alpha<1$ である各実数 α 及び各実数 a について，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\,X\leq a\,)=\alpha &\iff 1-\mathrm{P}(\,X\geq a\,)=\alpha \iff \mathrm{P}(\,X\geq a\,)=1-\alpha\\
&\iff a=\chi^2{}_n(1-\alpha) .
\end{aligned}$$

定理 9.1.3　確率変数 X は自由度 n の χ^2 分布に従うとする． $0<\alpha<1$ である各実数 α 及び各実数 a について，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\,X\geq a\,)=\alpha &\iff a=\chi^2{}_n(\alpha) ,\\
\mathrm{P}(\,X\leq a\,)=\alpha &\iff a=\chi^2{}_n(1-\alpha) .
\end{aligned}$$

正の自然数 n と実数 α（ $0\leq\alpha\leq1$ ）とに対する自由度 n の χ^2 分布の上側 α 点 $\chi^2{}_n(\alpha)$ の値を表にしたものを χ^2 分布表といいます．

例題 9.1　母標準偏差が σ（ $\sigma>0$ ）である正規母集団から無作為に非復元抽出した大きさ 30 の正規標本の偏差平方和を表す確率変数 S に対して，確率変数 $\dfrac{S}{\sigma^2}$ を考える．

(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{S}{\sigma^2}\geq a\right)=5\%$ である実数 a を求める．

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{S}{\sigma^2}\leq b\right)=1\%$ である実数 b を求める．

確率変数 $\dfrac{S}{\sigma^2}$ は自由度 29 の χ^2 分布に従う．

(1)

$$\mathrm{P}\left(\frac{S}{\sigma^2}\geq a\right)=0.05 \iff a=\chi^2{}_{29}(0.05) \fallingdotseq 42.56 .$$

(2)

$$\mathrm{P}\left(\frac{S}{\sigma^2}\leq b\right)=0.01 \iff b=\chi^2{}_{29}(0.99) \fallingdotseq 14.26 .$$

終

問題 9.1　母標準偏差が σ（ $\sigma>0$ ）である正規母集団から無作為に非復元抽出した大きさ 20 の正規標本の不偏分散を表す確率変数 U に対して，確率変数 $\dfrac{S}{\sigma^2}$ を考えます．

(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{S}{\sigma^2}\geq a\right)=1\%$ である実数 a を求めなさい．

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{S}{\sigma^2}\leq b\right)=5\%$ である実数 b を求めなさい．

――――― χ^2 分布の確率密度関数

まず Γ 関数といわれる関数を準備します． 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする Γ 関数 $\Gamma(x)$ は次のように定義されます：

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt \quad (\ x>0\ ) .$$

この Γ 関数 $\Gamma(x)$ について次の公式が成り立ちます：正の自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
\Gamma(n)&=(n-1)(n-2)(n-3)\cdots2\cdot1=(n-1)! ,\\
\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)&=\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots3\cdot1}{2^{n-1}}\sqrt{\pi} .
\end{aligned}$$

正の自然数 n に対して，自由度 n の χ^2 分布の確率密度関数 $f(x)$ は次のようになります：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}} & (\ x\geq0\ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x<0\ \text{のとき})\end{cases} .$$

[2] χ はギリシャ文字で“カイ”と言います．