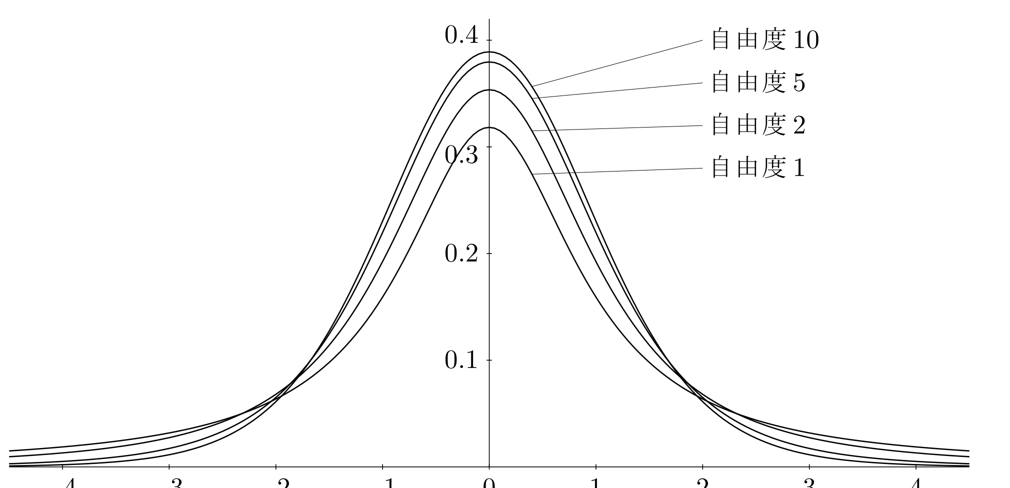
§9.2　t 分布

正の自然数 n に対して，標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う確率変数 Z と自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数 X とが互いに独立であるとき，確率変数 $Z\sqrt{\dfrac{n}{X}}$ が従う確率分布を自由度 n の t 分布といいます．t 分布の確率密度関数の式は後にしてまずグラフを描きます．



t 分布の確率密度関数のグラフ

このグラフから見当がつくように次の定理が成立ちます．

定理 9.2.1　t 分布に従う確率変数の確率密度関数は偶関数である．

定理 9.2.2　t 分布に従う確率変数 T 及び各実数 a について　$\mathrm{P}(\,T\le a\,)=\mathrm{P}(\,T\ge -a\,)$ ．

定理 9.2.3　t 分布に従う確率変数 T について，　$\mathrm{P}(\,T\le 0\,)=\mathrm{P}(\,T\ge 0\,)=\dfrac{1}{2}$ ，$\mathrm{E}[T]=0$ ，

正の自然数 n 及び実数 μ 及び正の実数 σ に対して，n 個の確率変数 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ は総て同じ正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従い互いに独立であるとします．確率変数 $\overline{X}$ は $\mathrm{N}\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うので，確率変数

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma}$$

は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います．　また，定理 9.1.1 より，確率変数 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ の偏差平方和を表す確率変数　$S=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$　に対して確率変数 $X=\dfrac{S}{\sigma^2}$　は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従います．故に，t 分布の定義より，確率変数

$$Z\sqrt{\frac{n-1}{X}}=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma}\sqrt{\frac{n-1}{\dfrac{S}{\sigma^2}}}=\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}\left(\overline{X}-\mu\right)$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従います．約分されて σ が消えることが重要です．

定理 9.2.4　n 個の確率変数 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ は総て同じ正規分布に従い，互いに独立であるとする．　それらの平均値を μ とおく．　平均を表す確率変数 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$　及び偏差平方和を表す確率変数　$S=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$　に対して，確率変数 $\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{S}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．

この定理を標本分布に適用します．母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した大きさ n の標本の標本確率変数 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ は，総て同じ正規分布に従い，互いに独立で，それら平均値は μ です．定理 9.2.4 より，標本確率変数 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ の平均を表す確率変数　$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$　及び $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ の偏差平方和を表す確率変数　$S=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$　に対して，確率変数 $\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{S}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従います．　$X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ の不偏分散を表す確率変数 $U=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)=\dfrac{S}{n-1}$　について，　$S=U(n-1)$　なので，

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{S}}\left(\overline{X}-\mu\right)=\sqrt{\frac{n(n-1)}{U(n-1)}}\left(\overline{X}-\mu\right)=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\ .$$

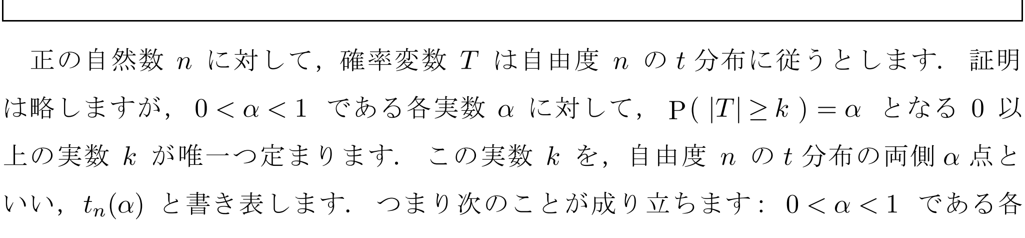
この確率変数が自由度 $n-1$ の t 分布に従います．

> **定理 9.2.5**　母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した大きさ n の正規標本において，平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき，不偏分散を表す確率変数を U とおくと，確率変数　$\sqrt{\dfrac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．

正の自然数 n に対して，確率変数 T は自由度 n の t 分布に従うとします．証明は略しますが，　$0<\alpha<1$　である各実数 α に対して，　$\mathrm{P}(\,|T|\ge k\,)=\alpha$　となる 0 以上の実数 k が唯一つ定まります．この実数 k を，自由度 n の t 分布の両側 α 点といい，$t_n(\alpha)$ と書き表します．つまり次のことが成り立ちます：　$0<\alpha<1$　である各実数 α 及び 0 以上の各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=\alpha\iff a=t_n(\alpha)\ .$$

確率密度関数のグラフを考えると次の図のようになります．

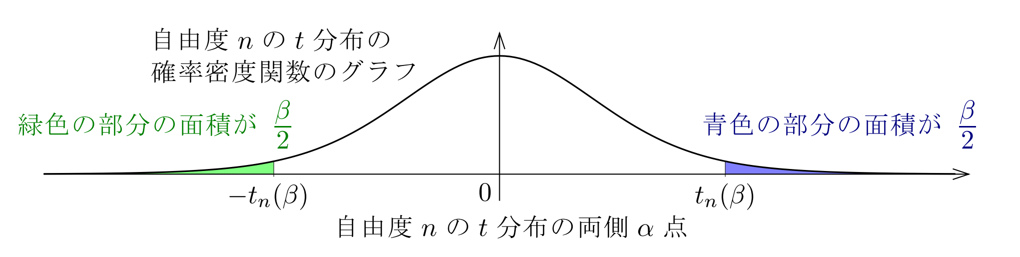


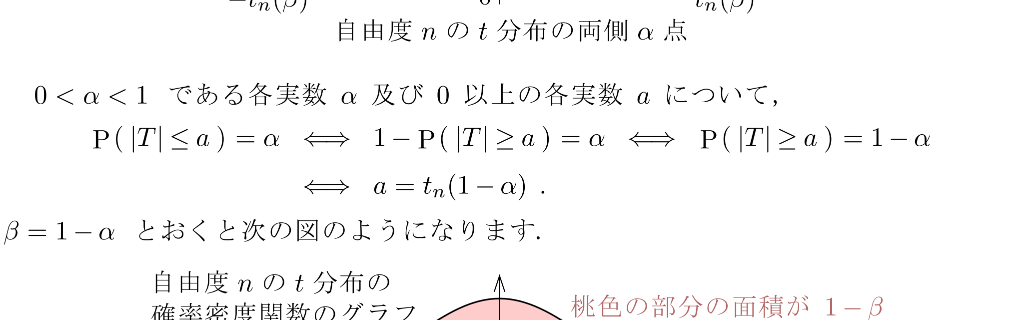
自由度 n の t 分布の両側 α 点

$0<\alpha<1$　である各実数 α 及び 0 以上の各実数 a について，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,|T|\le a\,)=\alpha &\iff 1-\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=\alpha \iff \mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=1-\alpha\\ &\iff a=t_n(1-\alpha)\ .\end{aligned}$$

$\beta=1-\alpha$　とおくと次の図のようになります．





実数 a について，$a\le 0$ ならば

$$\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=\mathrm{P}(\,T\ge 0\,)+\mathrm{P}(\,0\ge T\ge a\,)\ge \mathrm{P}(\,T\ge 0\,)=\frac{1}{2}\ ,$$

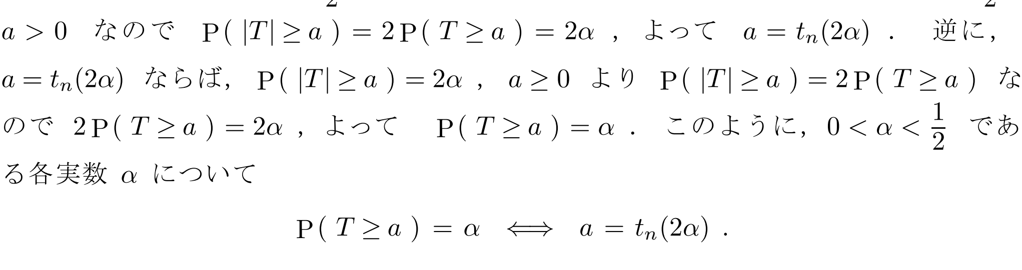
対偶をとると，$\mathrm{P}(\,T\ge a\,)<\dfrac{1}{2}$ ならば $a>0$．更に，$a\ge 0$ ならば

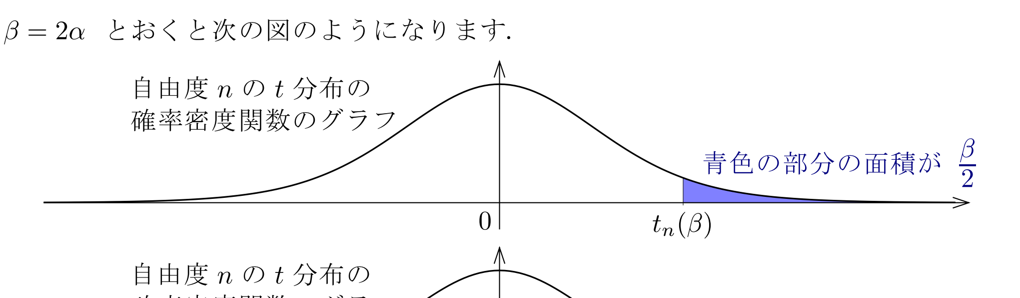
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)&=\mathrm{P}(\,T\le -a\,)+\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=\mathrm{P}(\,T\ge a\,)+\mathrm{P}(\,T\ge a\,)\\&=2\mathrm{P}(\,T\ge a\,)\ .\end{aligned}$$

実数 α について $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ とします．$\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=\alpha$ ならば，$\mathrm{P}(\,T\ge a\,)<\dfrac{1}{2}$，$a>0$ なので $\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=2\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=2\alpha$，よって $a=t_n(2\alpha)$．逆に，$a=t_n(2\alpha)$ ならば，$\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=2\alpha$，$a\ge 0$ より $\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=2\mathrm{P}(\,T\ge a\,)$ なので $2\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=2\alpha$，よって $\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=\alpha$．このように，$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ である各実数 α について

$$\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=\alpha\iff a=t_n(2\alpha)\ .$$

$\beta=2\alpha$　とおくと次の図のようになります．

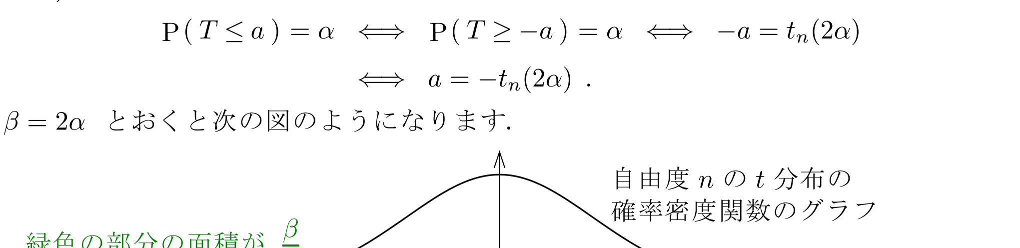


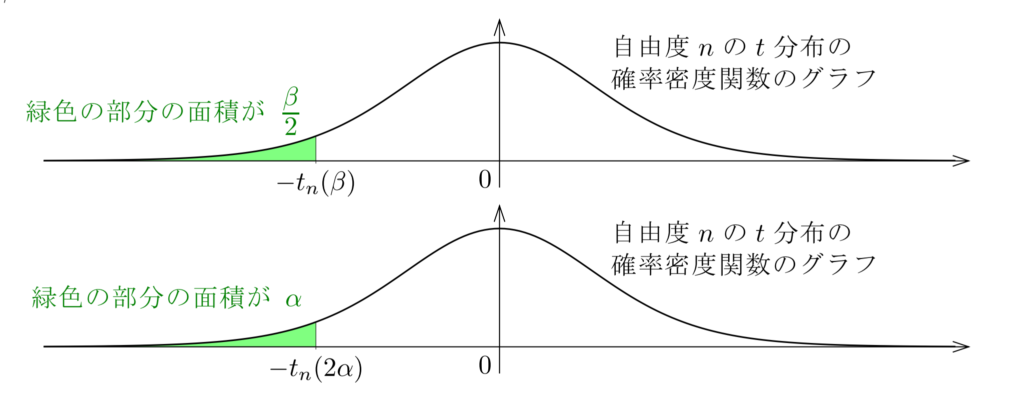


$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$　である各実数 α 及び各実数 a について，$\mathrm{P}(\,T\le a\,)=\mathrm{P}(\,T\ge -a\,)$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,T\le a\,)=\alpha &\iff \mathrm{P}(\,T\ge -a\,)=\alpha \iff -a=t_n(2\alpha)\\ &\iff a=-t_n(2\alpha)\ .\end{aligned}$$

$\beta=2\alpha$　とおくと次の図のようになります．





このようにして次の定理が導かれます．

定理 9.2.6　確率変数 T は自由度 n の t 分布に従うとする．　$0<\alpha<1$　である各実数 α 及び $a\ge 0$ である各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\,|T|\ge a\,)=\alpha\iff a=t_n(\alpha)\ ,$$

$$\mathrm{P}(\,|T|\le a\,)=\alpha\iff a=t_n(1-\alpha)\ .$$

$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$　である各実数 α 及び各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\,T\ge a\,)=\alpha\iff a=t_n(2\alpha)\ ,$$

$$\mathrm{P}(\,T\le a\,)=\alpha\iff a=-t_n(2\alpha)\ .$$

定理 9.2.5 と定理 9.2.6 とを併せます．

定理 9.2.7　母平均が μ である正規母集団から無作為抽出した大きさ n の正規標本において，平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき，不偏分散を表す確率変数を U とおく．$0<\alpha<1$　である各実数 α 及び $a\ge 0$ である各実数 a について，

$$\mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\ge a\right)=\alpha\iff a=t_{n-1}(\alpha)\ ,$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\le a\right)=\alpha\iff a=t_{n-1}(1-\alpha)\ .$$

$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$　である各実数 α 及び各実数 a について，

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\ge a\right)=\alpha\iff a=t_{n-1}(2\alpha)\ ,$$

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le a\right)=\alpha\iff a=-t_{n-1}(2\alpha)\ .$$

正の自然数 n と各実数 α $\left(\ 0\le\alpha\le\dfrac{1}{2}\ \right)$ とに対する自由度 n の t 分布の両側 α 点 $t_n(\alpha)$ の値を表にしたものを t 分布表といいます．

$\boxed{\text{例題 9.2}}$　母平均が μ である正規母集団から無作為に非復元抽出した大きさ 20 の正規標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}$ 及び不偏分散を表す確率変数 U に対して，確率変数 $\sqrt{\dfrac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ を考える．

(1)　$\mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\dfrac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\ge a\right)=5\%$　である実数 a を求める．

(2)　$\mathrm{P}\left(-b\le\sqrt{\dfrac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le b\right)=99\%$　である実数 b を求める．

(3)　$\mathrm{P}\left(\sqrt{\dfrac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\ge c\right)=1\%$　である実数 c を求める．

(4)　$\mathrm{P}\left(\sqrt{\dfrac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le d\right)=5\%$　である実数 d を求める．

確率変数 $T\sqrt{\dfrac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 19 の t 分布に従う．

(1)

$$\mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\ge a\right)=0.05\iff a=t_{19}(0.05)=2.093\ .$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(-b\le\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le b\right)=0.99&\iff \mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\le b\right)=0.99\\&\iff b=t_{19}(0.01)=2.861\ .\end{aligned}$$

(3)

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\ge c\right)=0.01\iff c=t_{19}(0.02)\fallingdotseq 2.539\ .$$

(4)

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le d\right)=0.05\iff d=-t_{19}(0.1)=-1.729\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 9.2}}$　母平均が μ である正規母集団から無作為に非復元抽出した大きさ 30 の正規標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}$ 及び不偏分散を表す確率変数を U に対して，確率変数 $\sqrt{\dfrac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ を考えます．

(1)　$\mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\dfrac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\ge a\right)=1\%$　である実数 a を求めなさい．

(2)　$\mathrm{P}\left(-b\le\sqrt{\dfrac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le b\right)=95\%$　である実数 b を求めなさい．

(3)　$\mathrm{P}\left(\sqrt{\dfrac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\ge c\right)=5\%$　である実数 c を求めなさい．

(4)　$\mathrm{P}\left(\sqrt{\dfrac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le d\right)=1\%$　である実数 d を求めなさい．

次の定理が成り立ちます．

定理　自然数 n が充分大きいとき，自由度 n の t 分布に従う確率変数 T は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

——— t 分布の確率密度関数

正の自然数 n に対して，自由度 n の t 分布の確率密度関数 $f(x)$ は次のようになります：

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\ .$$

ここで関数 $\Gamma(x)$ は前節で述べた Γ 関数です：

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{t}t^{x-1}dt\quad(\ x>0\ )\quad .$$