## 1.2 数列の項の総和

数列 $f$ の定義域に属す自然数 $m, n$ について $m \leq n$ とする．$f$ について，$m$ における項 $f(m)$ から $n$ における項 $f(n)$ までの総和

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

を $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ と書き表す：

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n) \ .$$

数列 $f$ の定義域に属す自然数 $m, n$ について $m \leq n$ とする．$f$ について，$m$ における項 $f(m)$ から $n$ における項 $f(n)$ までの総和

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

を $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ と書き表す：

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n) \ .$$

例

$$\sum_{k=3}^{9} \frac{k}{2} = \frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}+\frac{7}{2}+\frac{8}{2}+\frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21 \ .$$

数列 $f$ の定義域に属す自然数 $m, n$ について $m \leq n$ とする． $f$ について， $m$ における項 $f(m)$ から $n$ における項 $f(n)$ までの総和

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

を $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ と書き表す：

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n) \ .$$

例

$$\sum_{k=3}^{9} \frac{k}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21 \ .$$

$$\sum_{k=2}^{6} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90 \ .$$

終

式 $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ に現われる変数 $k$ を他の変数に置き換えても値は同じである.

式 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} f(k)$ に現われる変数 $k$ を他の変数に置き換えても値は同じである.

$\boxed{\text{例}}$

$$\sum_{k=2}^{5}\frac{6}{k}=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5}=3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5}=\frac{77}{10}\ .$$

$$\sum_{i=2}^{5}\frac{6}{i}=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5}=3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5}=\frac{77}{10}\ .$$

$$\sum_{j=2}^{5}\frac{6}{j}=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5}=3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5}=\frac{77}{10}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}\,1.2.1(1)}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{i^3}{10}$ を計算せよ.

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{i^3}{10} = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad = \qquad\qquad = \quad .$$

問 1.2.1(1) 総和 $\sum_{i=0}^{4} \frac{i^3}{10}$ を計算せよ.

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{i^3}{10} = \frac{0^3}{10} + \frac{1^3}{10} + \frac{2^3}{10} + \frac{3^3}{10} + \frac{4^3}{10} = \frac{0+1+8+27+64}{10} = 10 \ .$$

終

問1.2.1(2) 総和 $\displaystyle\sum_{j=2}^{5}\frac{12}{j+1}$ を計算せよ.

$$\sum_{j=2}^{5}\frac{12}{j+1} = \qquad + \qquad + \qquad + \qquad = \quad + \quad + \qquad + \quad = \qquad .$$

$\boxed{問 1.2.1(2)}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=2}^{5} \frac{12}{j+1}$ を計算せよ.

$$\sum_{j=2}^{5} \frac{12}{j+1} = \frac{12}{3} + \frac{12}{4} + \frac{12}{5} + \frac{12}{6} = 4 + 3 + \frac{12}{5} + 2 = \frac{57}{5} \ .$$

$\boxed{終}$

$4$ と $7$ とが数列 $f$ の定義域に属すとする.

$4$ と $7$ とが数列 $f$ の定義域に属するとする．定数 $c$ に対して，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=4}^{7}\{c\,f(k)\} = cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7)$$

$4$ と $7$ とが数列 $f$ の定義域に属するとする．定数 $c$ に対して，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{7}\{cf(k)\} &= cf(4)+cf(5)+cf(6)+cf(7)\\ &= c\{f(4)+f(5)+f(6)+f(7)\}\end{aligned}$$

$4$ と $7$ とが数列 $f$ の定義域に属するとする．定数 $c$ に対して，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{7}\{c\,f(k)\} &= cf(4)+cf(5)+cf(6)+cf(7)\\ &= c\{f(4)+f(5)+f(6)+f(7)\}\\ &= c\sum_{k=4}^{7} f(k)\ ,\end{aligned}$$

$$f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\sum_{k=4}^{7} f(k)$$

$4$ と $7$ とが数列 $f$ の定義域に属すとする．定数 $c$ に対して，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{7}\{cf(k)\} &= cf(4)+cf(5)+cf(6)+cf(7)\\ &= c\{f(4)+f(5)+f(6)+f(7)\}\\ &= c\sum_{k=4}^{7}f(k)\ ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=4}^{7}\{cf(k)\} = c\sum_{k=4}^{7}f(k)\ .$$

$4$ と $7$ とが数列 $f$ の定義域に属すとする．定数 $c$ に対して，総和記号 $\Sigma$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{7}\{cf(k)\} &= cf(4)+cf(5)+cf(6)+cf(7)\\ &= c\{f(4)+f(5)+f(6)+f(7)\}\\ &= c\sum_{k=4}^{7}f(k)\ ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=4}^{7}\{cf(k)\} = c\sum_{k=4}^{7}f(k)\ .$$

このようにして次の定理が成り立つ．

**定理**　$m \leq n$ である自然数 $m, n$ が数列 $f$ の定義域に属すとき，定数 $c$ に対して，

$$\sum_{k=m}^{n}\{cf(k)\} = c\sum_{k=m}^{n}f(k)\ .$$

$5$ と $7$ とが数列 $f$ と $g$ との両方の定義域に属すとする．総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\}=f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)$$

$5$ と $7$ とが数列 $f$ と $g$ との両方の定義域に属すとする．総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\} &= f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)\\ &= f(5)+f(6)+f(7)+g(5)+g(6)+g(7)\end{aligned}$$

$5$ と $7$ とが数列 $f$ と $g$ との両方の定義域に属すとする．総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\} &= f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)\\ &= f(5)+f(6)+f(7)+g(5)+g(6)+g(7)\\ &= \sum_{k=5}^{7}f(k)+\sum_{k=5}^{7}g(k)\ ,\end{aligned}$$

$$f(5)+f(6)+f(7)=\sum_{k=5}^{7}f(k)$$

$$g(5)+g(6)+g(7)=\sum_{k=5}^{7}g(k)$$

5 と 7 とが数列 $f$ と $g$ との両方の定義域に属すとする．総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\} &= f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)\\ &= f(5)+f(6)+f(7)+g(5)+g(6)+g(7)\\ &= \sum_{k=5}^{7}f(k)+\sum_{k=5}^{7}g(k)\ ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\} = \sum_{k=5}^{7}f(k)+\sum_{k=5}^{7}g(k)\ .$$

5 と 7 とが数列 $f$ と $g$ との両方の定義域に属すとする．総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\} = f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)$$
$$= f(5)+f(6)+f(7)+g(5)+g(6)+g(7)$$
$$= \sum_{k=5}^{7} f(k) + \sum_{k=5}^{7} g(k) \ ,$$

つまり

$$\sum_{k=5}^{7}\{f(k)+g(k)\} = \sum_{k=5}^{7} f(k) + \sum_{k=5}^{7} g(k) \ .$$

次の定理が成り立つ．

**定理**　$m \leq n$ である自然数 $m, n$ が数列 $f$ と $g$ との定義域に属すとき，

$$\sum_{k=m}^{n}\{f(k) \pm g(k)\} = \sum_{k=m}^{n} f(k) \pm \sum_{k=m}^{n} g(k) \quad \text{（複号同順）．}$$

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する.

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 $\sum$ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}=f(4)-f(5)+f(5)-f(6)+f(6)-f(7)+f(7)-f(8)$$

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 $\sum$ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\} = f(4)-\cancel{f(5)}+\cancel{f(5)}-f(6)+f(6)-f(7)+f(7)-f(8)$$

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 $\sum$ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\} = f(4) - \cancel{f(5)} + \cancel{f(5)} - \cancel{f(6)} + \cancel{f(6)} - f(7) + f(7) - f(8)$$

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 $\sum$ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}=f(4)-\cancel{f(5)}+\cancel{f(5)}-\cancel{f(6)}+\cancel{f(6)}-\cancel{f(7)}+\cancel{f(7)}-f(8)$$

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 $\sum$ の定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\} &= f(4)-\cancel{f(5)}+\cancel{f(5)}-\cancel{f(6)}+\cancel{f(6)}-\cancel{f(7)}+\cancel{f(7)}-f(8)\\ &= f(4)-f(8)\ .\end{aligned}$$

$4$ と $8$ とが定義域に属す数列 $f$ に対して $\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 $\sum$ の定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{7}\{f(k)-f(k+1)\} &= f(4)-\cancel{f(5)}+\cancel{f(5)}-\cancel{f(6)}+\cancel{f(6)}-\cancel{f(7)}+\cancel{f(7)}-f(8)\\ &= f(4)-f(8)\ .\end{aligned}$$

このような計算技法をしばしば用いる．

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=3}^{30}\left(\frac{7}{i}-\frac{7}{i+1}\right)$ を計算する.

例 総和 $\displaystyle\sum_{i=3}^{30}\left(\frac{7}{i}-\frac{7}{i+1}\right)$ を計算する.

$$\sum_{i=3}^{30}\left(\frac{7}{i}-\frac{7}{i+1}\right)$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-\frac{7}{5}+\frac{7}{5}-\frac{7}{6}+\frac{7}{6}-\frac{7}{7}+\cdots+\frac{7}{28}-\frac{7}{29}+\frac{7}{29}-\frac{7}{30}+\frac{7}{30}-\frac{7}{31}\ .$$

この式では次のように項が相殺されて消える.

$$
\begin{array}{l}
\frac{7}{3} - \frac{7}{4} \\
\quad + \frac{7}{4} - \frac{7}{5} \\
\quad\quad + \frac{7}{5} - \frac{7}{6} \\
\quad\quad\quad + \frac{7}{6} - \frac{7}{7} \\
\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\
\quad\quad\quad\quad\quad + \frac{7}{28} - \frac{7}{29} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \frac{7}{29} - \frac{7}{30} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \frac{7}{30} - \frac{7}{31} \\
\hline
\frac{7}{3} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{7}{31}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{7}{3} - \dfrac{7}{4} \\
\qquad + \dfrac{7}{4} - \dfrac{7}{5} \\
\qquad\qquad + \dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{6} \\
\qquad\qquad\qquad + \dfrac{7}{6} - \dfrac{7}{7} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{7}{28} - \dfrac{7}{29} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{7}{29} - \dfrac{7}{30} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{7}{30} - \dfrac{7}{31} \\
\hline
\dfrac{7}{3} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{7}{31}
\end{array}
$$

故に

$$
\sum_{i=3}^{30}\left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1}\right) = \frac{7}{3} - \frac{7}{31} = \frac{217-21}{93} = \frac{196}{93} \quad .
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}1.2.2}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=7}^{48}\left(\frac{24}{i-1}-\frac{24}{i}\right)$ を計算せよ.

$$\sum_{i=7}^{48}\left(\frac{24}{i-1}-\frac{24}{i}\right) = \qquad + \qquad + \qquad + \cdots + \qquad + \qquad$$

$$= \qquad = $$

$$= \qquad .$$

$\boxed{問1.2.2}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=7}^{48}\left(\frac{24}{i-1}-\frac{24}{i}\right)$ を計算せよ.

$$\sum_{i=7}^{48}\left(\frac{24}{i-1}-\frac{24}{i}\right)=\frac{24}{6}-\frac{24}{7}+\frac{24}{7}-\frac{24}{8}+\frac{24}{8}-\frac{24}{9}+\cdots+\frac{24}{46}-\frac{24}{47}+\frac{24}{47}-\frac{24}{48}$$

$$= \qquad\qquad = $$

$$= \qquad .$$

$\boxed{\text{問}1.2.2}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=7}^{48}\left(\frac{24}{i-1}-\frac{24}{i}\right)$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=7}^{48}\left(\frac{24}{i-1}-\frac{24}{i}\right) &= \frac{24}{6}-\frac{24}{7}+\frac{24}{7}-\frac{24}{8}+\frac{24}{8}-\frac{24}{9}+\cdots+\frac{24}{46}-\frac{24}{47}+\frac{24}{47}-\frac{24}{48} \\
&= \frac{24}{6}-\frac{24}{48} = 4-\frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{2}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=4}^{30}\left(\sqrt{3j+1}-\sqrt{3j-2}\right)$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=4}^{30}\left(\sqrt{3j+1}-\sqrt{3j-2}\right)$ を計算する.

$$\sum_{j=4}^{30}\left(\sqrt{3j+1}-\sqrt{3j-2}\right)$$

$$=\sqrt{13}-\sqrt{10}+\sqrt{16}-\sqrt{13}+\sqrt{19}-\sqrt{16}+\cdots+\sqrt{88}-\sqrt{85}+\sqrt{91}-\sqrt{88}\ .$$

この式では次のように項が相殺されて消える.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & & & \sqrt{13} & -\sqrt{10} \\
 & & & & & +\sqrt{16} & -\sqrt{13} & \\
 & & & & +\sqrt{19} & -\sqrt{16} & & \\
 & & & +\sqrt{21} & -\sqrt{19} & & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & +\sqrt{88} & -\sqrt{85} & & & & & \\
+\sqrt{91} & -\sqrt{88} & & & & & & \\
\hline
\sqrt{91} & & & & & & & -\sqrt{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & & & \sqrt{13} & -\sqrt{10} \\
 & & & & & +\sqrt{16} & -\sqrt{13} & \\
 & & & & +\sqrt{19} & -\sqrt{16} & & \\
 & & & +\sqrt{21} & -\sqrt{19} & & & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & +\sqrt{88} & -\sqrt{85} & & & & & \\
+\sqrt{91} & -\sqrt{88} & & & & & & \\
\hline
\sqrt{91} & & & & & & & -\sqrt{10}
\end{array}
$$

故に

$$
\sum_{j=4}^{30}\left(\sqrt{3j+1}-\sqrt{3j-2}\right)=\sqrt{91}-\sqrt{10}\ .
$$

終

$\boxed{問 1.2.3}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=2}^{28}\left(\sqrt{5j+4}-\sqrt{5j-1}\right)$ を計算せよ.

$$\sum_{j=2}^{28}\left(\sqrt{5j+4}-\sqrt{5j-1}\right)$$

$$= \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \cdots$$

$$+ \qquad + \qquad +$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad +$$

$$= \qquad .$$

$\boxed{問1.2.3}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=2}^{28}\left(\sqrt{5j+4}-\sqrt{5j-1}\right)$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{28}\left(\sqrt{5j+4}-\sqrt{5j-1}\right)\\
&=\sqrt{14}-\sqrt{9}+\sqrt{19}-\sqrt{14}+\sqrt{24}-\sqrt{19}+\sqrt{29}-\sqrt{24}+\cdots\\
&\qquad +\sqrt{134}-\sqrt{129}+\sqrt{139}-\sqrt{134}+\sqrt{144}-\sqrt{139}\\
&= \qquad\qquad\qquad\qquad =\\
&= \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{問 1.2.3}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=2}^{28}\left(\sqrt{5j+4}-\sqrt{5j-1}\right)$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{28}\left(\sqrt{5j+4}-\sqrt{5j-1}\right)\\
&=\sqrt{14}-\sqrt{9}+\sqrt{19}-\sqrt{14}+\sqrt{24}-\sqrt{19}+\sqrt{29}-\sqrt{24}+\cdots\\
&\qquad+\sqrt{134}-\sqrt{129}+\sqrt{139}-\sqrt{134}+\sqrt{144}-\sqrt{139}\\
&= -\sqrt{9}+\sqrt{144}=-3+12\\
&=9\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$