1.3 数列の項の総和の公式

以下の数列の項の総和の公式が成り立つ.

定理　正の自然数 n 及び定数 c に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \ , \qquad \sum_{k=0}^{n} c = c(n+1) \ .$$

定理　正の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

定理　正の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \ .$$

定理　正の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \ .$$

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$ であることを示す.

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ であることを示す．数列 f について，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{n\text{ 個の項の和}} .$$

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ であることを示す．数列 f について，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{n\ \text{個の項の和}}\ .$$

ここで，定数 c に対して，数列の項 $f(k)$ を $f(k)=c$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）と定める．

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ であることを示す．数列 f について，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{n\text{ 個の項の和}} \ .$$

ここで，定数 c に対して，数列の項 $f(k)$ を $f(k)=c$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）と定める． $f(1)=c$ ， $f(2)=c$ ， $f(3)=c$ ， $f(4)=c$ ，… ， $f(n-1)=c$ ， $f(n)=c$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+c+\cdots+c+c}_{n\text{ 個の項の和}} = cn \ .$$

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\sum_{k=0}^{n} c = c(n+1)$ であることを示す.

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\sum_{k=0}^{n} c = c(n+1)$ であることを示す．数列 f について，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \underbrace{f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{(n+1)\text{ 個の項の和}} .$$

正の自然数 n 及び定数 c に対して $\sum_{k=0}^{n} c = c(n+1)$ であることを示す．数列 f について，総和記号 $\sum$ の定義より，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \underbrace{f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{(n+1)\text{ 個の項の和}}\ .$$

ここで，定数 c に対して，数列の項 $f(k)$ を $f(k)=c$ ($k=0,1,2,3,\ldots,n$) と定める． $f(0)=c$ ， $f(1)=c$ ， $f(2)=c$ ， $f(3)=c$ ， $f(4)=c$ ，… ， $f(n-1)=c$ ， $f(n)=c$ なので，

$$\sum_{k=0}^{n} c = \underbrace{c+c+c+c+c+\cdots+c+c}_{(n+1)\text{ 個の項の和}} = c(n+1)\ .$$

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算する. そのために $k = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 2 次式 $P(k)$ を捜す.

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算する．そのために $k = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 2 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^2 + bk$ （ a, b は定数）とおくと，

$$P(k-1) - P(k) = a(k-1)^2 + b(k-1) - (ak^2 + bk) = -2ak + a - b \ .$$

　正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算する．そのために $k = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 2 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^2 + bk$ （ a, b は定数）とおくと，

$$P(k-1) - P(k) = a(k-1)^2 + b(k-1) - (ak^2 + bk) = -2ak + a - b\ .$$

k に関する恒等式 $P(k-1) - P(k) = k$ つまり

$$-2ak + a - b = k$$

が成り立つ条件は，

$$\quad = \quad \text{かつ} \quad\quad = \quad ;$$

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算する．そのために $k = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 2 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^2 + bk$ （ a, b は定数）とおくと，

$$P(k-1) - P(k) = a(k-1)^2 + b(k-1) - (ak^2 + bk) = -2ak + a - b \ .$$

k に関する恒等式 $P(k-1) - P(k) = k$ つまり

$$-2ak + a - b = k$$

が成り立つ条件は，

$$-2a = 1 \ \text{かつ}\ a - b = 0 \ ;$$

この連立方程式を解くと， $a = -\dfrac{1}{2}$ かつ $b = -\dfrac{1}{2}$ ．

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算する．そのために $k = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 2 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^2 + bk$ （ a, b は定数）とおくと，

$$P(k-1) - P(k) = a(k-1)^2 + b(k-1) - (ak^2 + bk) = -2ak + a - b \ .$$

k に関する恒等式 $P(k-1) - P(k) = k$ つまり

$$-2ak + a - b = k$$

が成り立つ条件は，

$$-2a = 1 \ \text{かつ} \ a - b = 0 \ ;$$

この連立方程式を解くと， $a = -\dfrac{1}{2}$ かつ $b = -\dfrac{1}{2}$ ．そこで， $P(k) = -\dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{2}k$ とおくと $k = P(k-1) - P(k)$ ．

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k)=-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k$ について，

$k=P(k-1)-P(k)$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k)=-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k$ について，

$k=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k)=-\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}k$ について，

$k=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\
&= P(0)-\cancel{P(1)}+\cancel{P(1)}-\cancel{P(2)}+\cancel{P(2)}-\cancel{P(3)}+\cancel{P(3)}-\cancel{P(4)}+\cdots\\
&\qquad\qquad +\cancel{P(n-2)}-\cancel{P(n-1)}+\cancel{P(n-1)}-P(n)
\end{aligned}
$$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$ について，

$k = P(k-1) - P(k)$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \{P(k-1) - P(k)\}$$

$$= P(0) - \cancel{P(1)} + \cancel{P(1)} - \cancel{P(2)} + \cancel{P(2)} - \cancel{P(3)} + \cancel{P(3)} - \cancel{P(4)} + \cdots$$

$$+ \cancel{P(n-2)} - \cancel{P(n-1)} + \cancel{P(n-1)} - P(n)$$

$$= P(0) - P(n)$$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k)=-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k$ について，
$k=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\ &= P(0)-P(n)=0-\left(-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k)=-\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}k$ について，
$k=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\} \\
&= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots \\
&\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n) \\
&= P(0)-P(n)=0-\left(-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)=\frac{n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k)=-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k$ について，

$k=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\ &= P(0)-P(n)=0-\left(-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)=\frac{n^2+n}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\ .\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 2 次式 $P(k) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$ について，
$k = P(k-1) - P(k)$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} \{P(k-1) - P(k)\} \\
&= P(0) - P(1) + P(1) - P(2) + P(2) - P(3) + P(3) - P(4) + \cdots \\
&\qquad + P(n-2) - P(n-1) + P(n-1) - P(n) \\
&= P(0) - P(n) = 0 - \left(-\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) = \frac{n^2+n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \ .
\end{aligned}
$$

故に

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

$$1+2+3+4+\cdots+n \;=\; \sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

更に,

$$\sum_{k=0}^{n} k \;=\; 0+1+2+3+\cdots+n \;=\; 1+2+3+\cdots+n \;=\; \sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

公式　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ は次のようにも導ける．　$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ とおく：

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \ .$$

公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ は次のようにも導ける. $S = \sum_{k=1}^{n} k$ とおく:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \ .$$

右辺で項を並べる順番を全く逆にすると,

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 4 + 3 + 2 + 1 \ .$$

この2つの等式の，左辺どうしを足して，右辺の1番目の項どうしを足して，2番目の項どうしを足して，3番目の項どうしを足して，というように計算する．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & n-3 & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \cdots & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} \\
2S & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1
\end{array}
$$

この2つの等式の，左辺どうしを足して，右辺の 1 番目の項どうしを足して，2 番目の項どうしを足して，3 番目の項どうしを足して，というように計算する．

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & n-3 & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \cdots & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} \\
\boxed{2S} & = & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \cdots & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1}
\end{array}$$

この等式の右辺は $n+1$ を n 個足しているので，

$$2S = (n+1)\times n\ ,$$

この2つの等式の，左辺どうしを足して，右辺の1番目の項どうしを足して，2番目の項どうしを足して，3番目の項どうしを足して，というように計算する．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\boxed{\begin{matrix}S\\S\end{matrix}} & \begin{matrix}=\\=\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\n\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}2\\n-1\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\n-2\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}4\\n-3\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots\\\cdots\end{matrix} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n-3\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n-2\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n-1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}} \\
\Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} & & & & \Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} & & \Big\downarrow\text{足す} \\
\boxed{2S} & = & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \cdots & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1}
\end{array}
$$

この等式の右辺は $n+1$ を n 個足しているので，

$$2S = (n+1) \times n \ ,$$

よって $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ つまり $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ．

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算する．そのために $k^2 = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 3 次式 $P(k)$ を捜す．

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算する．そのために $k^2 = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 3 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^3 + bk^2 + ck$ （ a, b, c は定数）とおくと，

$$\begin{aligned} P(k-1) - P(k) &= a(k-1)^3 + b(k-1)^2 + c(k-1) - (ak^3 + bk^2 + ck) \\ &= ak^3 - 3ak^2 + 3ak - a + bk^2 - 2k + b - ck - c - ak^3 - bk^2 - ck \\ &= -3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c \ . \end{aligned}$$

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算する．そのために $k^2 = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 3 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^3 + bk^2 + ck$ （ a, b, c は定数）とおくと，

$$\begin{aligned} P(k-1) - P(k) &= a(k-1)^3 + b(k-1)^2 + c(k-1) - (ak^3 + bk^2 + ck) \\ &= ak^3 - 3ak^2 + 3ak - a + bk^2 - 2k + b - ck - c - ak^3 - bk^2 - ck \\ &= -3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c \ . \end{aligned}$$

k に関する恒等式 $P(k-1) - P(k) = k^2$ つまり

$$-3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c = k^2$$

が成り立つ条件は，

$$= \quad \text{かつ} \quad = \quad \text{かつ} \quad = \quad ;$$

　正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算する．そのために $k^2 = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 3 次式 $P(k)$ を捜す．　$P(k) = ak^3 + bk^2 + ck$ （ a, b, c は定数）とおくと，

$$\begin{aligned} P(k-1) - P(k) &= a(k-1)^3 + b(k-1)^2 + c(k-1) - (ak^3 + bk^2 + ck) \\ &= ak^3 - 3ak^2 + 3ak - a + bk^2 - 2k + b - ck - c - ak^3 - bk^2 - ck \\ &= -3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c \ . \end{aligned}$$

k に関する恒等式 $P(k-1) - P(k) = k^2$ つまり

$$-3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c = k^2$$

が成り立つ条件は，

$$-3a = 1 \ \text{かつ} \ 3a - 2b = 0 \ \text{かつ} \ -a + b - c = 0 \ ;$$

この連立方程式を解くと，$a = -\dfrac{1}{3}$ かつ $b = -\dfrac{1}{2}$ かつ $c = -\dfrac{1}{6}$ ．

正の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算する．そのために $k^2 = P(k-1) - P(k)$ である変数 k の 3 次式 $P(k)$ を捜す． $P(k) = ak^3 + bk^2 + ck$ （ a, b, c は定数）とおくと，

$$
\begin{aligned}
P(k-1) - P(k) &= a(k-1)^3 + b(k-1)^2 + c(k-1) - (ak^3 + bk^2 + ck) \\
&= ak^3 - 3ak^2 + 3ak - a + bk^2 - 2k + b - ck - c - ak^3 - bk^2 - ck \\
&= -3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c \ .
\end{aligned}
$$

k に関する恒等式 $P(k-1) - P(k) = k^2$ つまり

$$-3ak^2 + (3a-2b)k - a + b - c = k^2$$

が成り立つ条件は，

$$-3a = 1 \ \text{かつ} \ 3a - 2b = 0 \ \text{かつ} \ -a + b - c = 0 \ ;$$

この連立方程式を解くと， $a = -\dfrac{1}{3}$ かつ $b = -\dfrac{1}{2}$ かつ $c = -\dfrac{1}{6}$ ．そこで $P(k) = -\dfrac{1}{3}k^3 - \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{6}k$ とすると $k^2 = P(k-1) - P(k)$ ．

　自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k) = -\dfrac{1}{3}k^3 - \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{6}k$ について，
$k^2 = P(k-1) - P(k)$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k)=-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{6}k$ について，
$k^2=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k)=-\dfrac{1}{3}k^3-\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{6}k$ について，

$k^2=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\} \\
&= P(0)-\cancel{P(1)}+\cancel{P(1)}-\cancel{P(2)}+\cancel{P(2)}-\cancel{P(3)}+\cancel{P(3)}-\cancel{P(4)}+\cdots \\
&\qquad +\cancel{P(n-2)}-\cancel{P(n-1)}+\cancel{P(n-1)}-P(n)
\end{aligned}
$$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k) = -\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{6}k$ について，

$k^2 = P(k-1) - P(k)$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \{P(k-1) - P(k)\} \\
&= P(0) - \cancel{P(1)} + \cancel{P(1)} - \cancel{P(2)} + \cancel{P(2)} - \cancel{P(3)} + \cancel{P(3)} - \cancel{P(4)} + \cdots \\
&\qquad + \cancel{P(n-2)} - \cancel{P(n-1)} + \cancel{P(n-1)} - P(n) \\
&= P(0) - P(n)
\end{aligned}
$$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k) = -\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{6}k$ について，
$k^2 = P(k-1) - P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \{P(k-1) - P(k)\} \\
&= P(0) - P(1) + P(1) - P(2) + P(2) - P(3) + P(3) - P(4) + \cdots \\
&\qquad\qquad + P(n-2) - P(n-1) + P(n-1) - P(n) \\
&= P(0) - P(n) = 0 - \left(-\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n\right)
\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k)=-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{6}k$ について，

$k^2=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\&=P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\&\qquad+P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\&=P(0)-P(n)=0-\left(-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n\right)\\&=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k)=-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{6}k$ について，
$k^2=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\ &= P(0)-P(n)=0-\left(-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n\right)\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .\end{aligned}$$

自然数を表す変数 k の 3 次式 $P(k)=-\dfrac{1}{3}k^3-\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{6}k$ について，
$k^2=P(k-1)-P(k)$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\ &= P(0)-P(n)=0-\left(-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n\right)\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .\end{aligned}$$

故に

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

更に,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= 0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .\end{aligned}$$

例 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{3k-5}{4}$ を計算する.

例 総和 $\sum_{k=1}^{20} \frac{3k-5}{4}$ を計算する.

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{3k-5}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(3k-5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 5\right)$$

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{3k-5}{4}$ を計算する.

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{3k-5}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(3k-5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 5\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn$$

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4}$ を計算する.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(3k-5)=\frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}5\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{20\cdot 21}{2}-5\cdot 20\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=cn$$

例 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4}$ を計算する.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(3k-5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{20}k - \sum_{k=1}^{20}5\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{20\cdot 21}{2} - 5\cdot 20\right)\\ &= \frac{20}{4}\left(\frac{3\cdot 21}{2} - 5\right) = 5\cdot\frac{53}{2}\\ &= \frac{265}{2}\ .\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}c = cn$$

終

例 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(3k-5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{k=1}^{20}k - \sum_{k=1}^{20}5\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{20\cdot 21}{2} - 5\cdot 20\right) \\
&= \frac{20}{4}\left(\frac{3\cdot 21}{2} - 5\right) = 5\cdot\frac{53}{2} \\
&= \frac{265}{2}\ .
\end{aligned}
$$

終

計算の途中の式で共通因数を括り出すとしばしば計算が簡単になる.

$\boxed{問 1.3.1}$ 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} \frac{5k-7}{6}$ を計算せよ.

$\boxed{問 1.3.1}$ 総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} \frac{5k-7}{6}$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{30} \frac{5k-7}{6} &= \frac{1}{6}\left(5\sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} 7\right) = \frac{1}{6}\left(5 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} - 7 \cdot 30\right) \\
&= \frac{30}{6}\left(\frac{5 \cdot 31}{2} - 7\right) = 5\left(\frac{155}{2} - 7\right) \\
&= \frac{705}{2} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2 - 3i}{5}$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5}$ を計算する.

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}(4i^2-3i) = \frac{1}{5}\left(4\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3\sum_{i=1}^{10} i\right)$$

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5}$ を計算する.

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}(4i^2-3i) = \frac{1}{5}\left(4\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3\sum_{i=1}^{10} i\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2 - 3i}{5}$ を計算する.

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2 - 3i}{5} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{10} (4i^2 - 3i) = \frac{1}{5}\left(4 \sum_{i=1}^{10} i^2 - 3 \sum_{i=1}^{10} i\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(4 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{例}}$ 総和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}(4i^2-3i) = \frac{1}{5}\left(4\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3\sum_{i=1}^{10} i\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} - 3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}\right) \\
&= \frac{10\cdot 11}{5}\left(\frac{4\cdot 21}{6} - \frac{3}{2}\right) \\
&= 22\left(14-\frac{3}{2}\right) = 11\cdot(28-3) = 11\cdot 25 \\
&= 275\ .
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{終}}$

例 総和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{4i^2-3i}{5} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}(4i^2-3i) = \frac{1}{5}\left(4\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3\sum_{i=1}^{10} i\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} - 3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}\right) \\
&= \frac{10\cdot 11}{5}\left(\frac{4\cdot 21}{6} - \frac{3}{2}\right) \\
&= 22\left(14-\frac{3}{2}\right) = 11\cdot(28-3) = 11\cdot 25 \\
&= 275 \ .
\end{aligned}
$$

終

計算の途中の式で共通因数を括り出すとしばしば計算が簡単になる.

$\boxed{問 1.3.2}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{20} \frac{j(3j-7)}{10}$ を計算せよ.

$\boxed{問1.3.2}$ 総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{20} \frac{j(3j-7)}{10}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{20} \frac{j(3j-7)}{10} &= \frac{1}{10}\left(3\sum_{j=1}^{20} j^2 - 7\sum_{j=1}^{20} j\right) = \frac{1}{10}\left(3 \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 7 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}\right) \\
&= \frac{20 \cdot 21}{10} \cdot \left(3 \cdot \frac{41}{6} - 7 \cdot \frac{1}{2}\right) = 42 \cdot \frac{102}{6} = 7 \cdot 102 \\
&= 714\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(3i^2+5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} 5\right)$$

$\boxed{\text{例}}$ 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(3i^2+5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} 5\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} c = c(n+1)$$

$\boxed{\text{例}}$ 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(3i^2+5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} 5\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5(n+1)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} c = c(n+1)$$

例 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4} &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(3i^2+5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} 5\right) \\
&= \frac{1}{4}\left\{3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5(n+1)\right\} \\
&= \frac{n+1}{4}\left\{\frac{n(2n+1)}{2}+5\right\} = \frac{n+1}{4}\cdot\frac{2n^2+n+10}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+10)}{8} .
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} c = c(n+1)$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 自然数 n に対して総和 $\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{3i^2+5}{4} &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(3i^2+5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} 5\right) \\
&= \frac{1}{4}\left\{3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5(n+1)\right\} \\
&= \frac{n+1}{4}\left\{\frac{n(2n+1)}{2} + 5\right\} = \frac{n+1}{4} \cdot \frac{2n^2+n+10}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+10)}{8}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

計算の途中の式で共通因数を括り出すとしばしば計算が簡単になる. また, 特に要求されていない限り, 因数分解されている式を展開する必要はない. 例えば $(n+1)(n+2)+(n+3)(n+4)$ というような式は因数分解されていないので展開して整理すること.

$\boxed{問1.3.3}$ 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{4i^2-3}{5}$ を計算せよ.

$\boxed{問1.3.3}$ 自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{4i^2-3}{5}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\frac{4i^2-3}{5} &= \frac{1}{5}\left(4\sum_{i=0}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}3\right)=\frac{1}{5}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3(n+1)\right\}\\ &= \frac{n+1}{5}\left\{\frac{2n(2n+1)}{3}-3\right\}=\frac{n+1}{5}\,\frac{4n^2+2n-9}{3}\\ &= \frac{(n+1)(4n^2+2n-9)}{15}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j(4j-5)}{3}=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(4j^2-5j)=\frac{1}{3}\left(4\sum_{j=1}^{n}j^2-5\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} (4j^2 - 5j) = \frac{1}{3} \left(4 \sum_{j=1}^{n} j^2 - 5 \sum_{j=1}^{n} j \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{例}$ 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(4j^2-5j) = \frac{1}{3}\left(4\sum_{j=1}^{n} j^2 - 5\sum_{j=1}^{n} j\right) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(4j^2-5j) = \frac{1}{3}\left(4\sum_{j=1}^{n} j^2 - 5\sum_{j=1}^{n} j\right) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3}\left\{\frac{2(2n+1)}{3} - \frac{5}{2}\right\} = \frac{n(n+1)}{3}\cdot\frac{8n+4-15}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(8n-11)}{18}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{j(4j-5)}{3} &= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(4j^2-5j) = \frac{1}{3}\left(4\sum_{j=1}^{n} j^2 - 5\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \frac{1}{3}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \frac{n(n+1)}{3}\left\{\frac{2(2n+1)}{3} - \frac{5}{2}\right\} = \frac{n(n+1)}{3}\cdot\frac{8n+4-15}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(8n-11)}{18}\ .
\end{aligned}
$$

終

計算の途中の式で共通因数を括り出すとしばしば計算が簡単になる．また，特に要求されていない限り，因数分解されている式を展開する必要はない．例えば $(n+1)(n+2)+(n+3)(n+4)$ というような式は因数分解されていないので展開して整理すること.

$\boxed{問1.3.4}$ 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{j=1}^{n} \frac{j(3j-4)}{5}$ を計算せよ.

問1.3.4 正の自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j(3j-4)}{5}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\frac{j(3j-4)}{5} &= \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{n}(3j^2-4j) = \frac{1}{5}\left(3\sum_{j=1}^{n}j^2 - 4\sum_{j=1}^{n}j\right) \\
&= \frac{1}{5}\left\{3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \frac{n(n+1)}{5}\left(\frac{2n+1}{2}-2\right) = \frac{n(n+1)}{5}\frac{2n-3}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n-3)}{10}\ .
\end{aligned}$$

終