

1.4 等差数列

数列 $\{a_n\}$ について, 漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい, 定数 d をその公差という.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \quad \text{において} \quad n = 4 \quad \text{とすると} \quad a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \quad \text{において} \quad n = 5 \quad \text{とすると} \quad a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89 ,$$

\vdots .

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので,

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので,

$$a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = a_3 - 10 = 49 - 10 = 39 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので,

$$a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = a_3 - 10 = 49 - 10 = 39 ,$$

$$a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = a_2 - 10 = 39 - 10 = 29 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79 ,$$

$$a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので,

$$a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = a_3 - 10 = 49 - 10 = 39 ,$$

$$a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = a_2 - 10 = 39 - 10 = 29 ,$$

$$a_{n-1} = a_n - 10 \text{ において } n = 1 \text{ とすると } a_0 = a_1 - 10 = 29 - 10 = 19 .$$

終

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差を d とおく. 正の各自然数 n について漸化式

$a_n = a_{n-1} + d$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

$$a_{m+1} = a_m + d = a_m + d ,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} + d = (a_m + d) + d = a_m + 2d ,$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d = a_m + 3d ,$$

$$a_{m+4} = a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d = a_m + 4d ,$$

$$a_{m+5} = a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d = a_m + 5d ,$$

\vdots .

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差を d とおく. 正の各自然数 n について漸化式

$a_n = a_{n-1} + d$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

$$a_{m+1} = a_m + d = a_m + d ,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} + d = (a_m + d) + d = a_m + 2d ,$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d = a_m + 3d ,$$

$$a_{m+4} = a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d = a_m + 4d ,$$

$$a_{m+5} = a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d = a_m + 5d ,$$

\vdots .

このように, 各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd \end{array} .$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd \end{array} .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m+k = n$ とおく ; $k = n - m$ なので,

$$a_n = a_m + d(n - m) .$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd \end{array} .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m+k = n$ とおく ; $k = n - m$ なので,

$$a_n = a_m + d(n - m) .$$

定理 数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

定理 数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

この定理より次のようになる.

定理 数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公差が d である等差数列であるとき,

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 + d(n - 1) .$$

定理 数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき、数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公差が d である等差数列であるとき,

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 + d(n - 1) .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公差が d である等差数列であるとき,

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 + dn .$$

定理 数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき、数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公差が d である等差数列であるとき,

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 + d(n - 1) .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公差が d である等差数列であるとき,

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 + dn .$$

このように、等差数列の一般項は独立変数 n の 1 次式で表される.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公差が -3 である等差数列で, $a_5 = 7$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公差が -3 である等差数列で, $a_5 = 7$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公差が -3 である等差数列なので, 各自然数 n に対して,

$$a_n = a_5 + (-3)(n - 5) = 7 - 3n + 15 = 22 - 3n .$$

終

$$a_n = a_m + d(n - m)$$

問1.4.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が $-\frac{3}{2}$ である等差数列であり, $a_7 = 5$ とする.

1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が $-\frac{3}{2}$ である等差数列なので, 1 以上の各自然数 n に対して,

$$a_n = a_7 + \left(\quad \right) (n - \quad) = \quad = \quad .$$

問1.4.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が $-\frac{3}{2}$ である等差数列であり, $a_7 = 5$ とする.

1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が $-\frac{3}{2}$ である等差数列なので, 1 以上の各自然数 n に対して,

$$a_n = a_7 + \left(-\frac{3}{2}\right)(n-7) = 5 - \frac{3}{2}n + \frac{21}{2} = \frac{31-3n}{2} .$$

終

例 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について $a_3 = 7$, $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について $a_3 = 7$, $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず等差数列の公差を求める.

例 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について $a_3 = 7$, $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず等差数列の公差を求める.

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の公差を d とおく. $a_8 = a_3 + d(8 - 3)$ なので,
, $a_n = a_m + d(n - m)$

例 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について $a_3 = 7$, $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず等差数列の公差を求める.

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の公差を d とおく. $a_8 = a_3 + d(8 - 3)$ なので,
 $27 = 7 + 5d$, $5d = 20$, $d = 4$.

例 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ について $a_3 = 7$, $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず等差数列の公差を求める.

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の公差を d とおく. $a_8 = a_3 + d(8 - 3)$ なので,
 $27 = 7 + 5d$, $5d = 20$, $d = 4$. 正の各自然数 n に対して,

$$a_n = a_3 + 4(n - 3) = 7 + 4n - 12 = 4n - 5 .$$

終

問1.4.2 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について, $a_5 = 22$, $a_{11} = 4$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差を d とおく. $a_{11} =$ なので,
 $4 =$, = , $d =$. 正の各自然数 n に対して,
 $a_n =$ = = .

問1.4.2 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について, $a_5 = 22$, $a_{11} = 4$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差を d とおく. $a_{11} = a_5 + d(11 - 5)$ なので,
 $4 = 22 + 6d$, $6d = -18$, $d = -3$. 正の各自然数 n に対して,

$$a_n = \quad = \quad = \quad .$$

問1.4.2 等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について, $a_5 = 22$, $a_{11} = 4$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等差数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公差を d とおく. $a_{11} = a_5 + d(11 - 5)$ なので,
 $4 = 22 + 6d$, $6d = -18$, $d = -3$. 正の各自然数 n に対して,

$$a_n = a_{11} - 3(n - 11) = 4 - 3n + 33 = 37 - 3n .$$

終

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 2 である等差数列で、第 1 項は $a_1 = 5$ とする。
各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算する。

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 2 である等差数列で、第 1 項は $a_1 = 5$ とする.

各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算する.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 2 である等差数列なので、1 以上の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k-1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3 .$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 2 である等差数列で、第 1 項は $a_1 = 5$ とする.

各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算する.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 2 である等差数列なので、1 以上の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k-1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3 .$$

各自然数 m に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k + 3) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 3 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= n(n+4) . \end{aligned}$$

終

問1.4.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公差が 4 である等差数列で、第 0 項は $a_0 = 5$ とする。正の各自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^m a_k$ を計算せよ。

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 4 である等差数列なので、各自然数 k に対して

$$a_k = \quad = \quad .$$

正の各自然数 m に対して、

$$\sum_{k=0}^m a_k = \quad = \quad = \quad .$$

問1.4.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公差が 4 である等差数列で、第 0 項は $a_0 = 5$ とする。正の各自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^m a_k$ を計算せよ。

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 4 である等差数列なので、各自然数 k に対して

$$a_k = a_0 + 4k = 4k + 5 .$$

正の各自然数 m に対して、

$$\sum_{k=0}^m a_k = \quad = \quad = \quad .$$

問1.4.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公差が 4 である等差数列で、第 0 項は $a_0 = 5$ とする。正の各自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^m a_k$ を計算せよ。

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は公差が 4 である等差数列なので、各自然数 k に対して

$$a_k = a_0 + 4k = 4k + 5 .$$

正の各自然数 m に対して、

$$\sum_{k=0}^m a_k = \sum_{k=0}^m (4k + 5) = 4 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 5(m+1) = (m+1)(2m+5) .$$

終