2.0 速度

“極限” という数学の新しい概念を導入する. “極限” の概念が必要になる身近な例は “速度” である.

物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s ）を考える.

物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は $\mathrm{m/s}$）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおく．物理実験によって，ほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であることが分かる．

物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおく．物理実験によって，ほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であることが分かる．

ある時刻からある時刻までの時間における落下距離に対して落下の平均速度は次のようになる：

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}}\,.$$

物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおく．物理実験によって，ほぼ $\varphi(t)=4.9t^2$ であることが分かる．

ある時刻からある時刻までの時間における落下距離に対して落下の平均速度は次のようになる：

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} \ .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3)=4.9\times 3^2=44.1$ から $\varphi(5)=4.9\times 5^2=122.5$ に変化する；この間の落下距離は $\varphi(5)-\varphi(3)=122.5-44.1$ なので，この間の落下の平均速度は

$$\frac{\varphi(5)-\varphi(3)}{5-3} = \frac{122.5-44.1}{2} = 39.2 \ .$$

物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおく．物理実験によって，ほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であることが分かる．

ある時刻からある時刻までの時間における落下距離に対して落下の平均速度は次のようになる：

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1$ から $\varphi(5) = 4.9 \times 5^2 = 122.5$ に変化する；この間の落下距離は $\varphi(5) - \varphi(3) = 122.5 - 44.1$ なので，この間の落下の平均速度は

$$\frac{\varphi(5) - \varphi(3)}{5 - 3} = \frac{122.5 - 44.1}{2} = 39.2 .$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(3)}{t - 3}$ である．幾つかの t の値に対してをこの平均速度を計算する．

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である.

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3}=29.89\ ,$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89 \ ,$$

$$3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449 \ ,$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89\ ,$$

$$3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449\ ,$$

$$3.001 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3} = 29.4049\ ,$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89 \ ,$$

$$3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449 \ ,$$

$$3.001 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3} = 29.4049 \ ,$$

$$3.0001 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3} = 29.40049 \ ,$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$
\begin{aligned}
3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89 \ , \\
3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449 \ , \\
3.001 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3} = 29.4049 \ , \\
3.0001 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3} = 29.40049 \ , \\
3.00001 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.0001)-\varphi(3)}{3.00001-3} = 29.400049 \ , \\
& \vdots \qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$
\begin{aligned}
3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89\ , \\
3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449\ , \\
3.001 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3} = 29.4049\ , \\
3.0001 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3} = 29.40049\ , \\
3.00001 \text{ 秒後までの平均速度は } & \frac{\varphi(3.0001)-\varphi(3)}{3.00001-3} = 29.400049\ , \\
& \vdots \qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は $29.4\,\mathrm{m/s}$ であると考える．

　このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は $29.4\,\mathrm{m/s}$ であると考える．つまり，落下開始 3 秒後の瞬間速度は，

　変数 t の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ が近づく値である．この瞬間速度を単に速度という．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は $29.4\,\mathrm{m/s}$ であると考える．つまり，落下開始 3 秒後の瞬間速度は，

変数 t の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ が近づく値である．この瞬間速度を単に速度という．

このように，“瞬間速度” の概念を数学的に定義する際に，“ 変数 t の値を定数 a に近づけるとき t の関数の値が近づく値 ” ということを考える．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は $29.4\,\mathrm{m/s}$ であると考える．つまり，落下開始 3 秒後の瞬間速度は，

変数 t の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ が近づく値である．この瞬間速度を単に速度という．

このように，“瞬間速度”の概念を数学的に定義する際に，“変数 t の値を定数 a に近づけるとき t の関数の値が近づく値”ということを考える．このような概念を極限という．極限の概念はこれから学ぶ微分積分において大変重要である．