2.3 関数の極限の性質

関数 f 及び定数 a について，a を除く f の定義域の内で a に限りなく近づくことができて，

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，次のように書き表す：

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to c \; .$$

関数 f 及び定数 a について，a を除く f の定義域の内で a に限りなく近づくことができて，

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると
f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，次のように書き表す：

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to c \ .$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき，c を $f(x)$ の極限（値）といい，$\lim_{x \to a} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x \to a} f(x) = c$.

関数の極限に関する定理をいくつか述べる．それらの証明は省略する．

定理　関数 f と g 及び定数 a について，変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x \to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x \to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x \to a} g(x)\right\};$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 2$ のときの $x^4 + 3^x$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \to 2$ のときの $x^4 + 3^x$ の極限を調べる.

冪関数 x^4 及び指数関数 3^x は連続なので,

$$\lim_{x\to 2} x^4 = 2^4 = 16 \ , \qquad \lim_{x\to 2} 3^x = 3^2 = 9 \ .$$

例 変数 x について $x \to 2$ のときの $x^4 + 3^x$ の極限を調べる.

冪関数 x^4 及び指数関数 3^x は連続なので,

$$\lim_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16 , \qquad \lim_{x \to 2} 3^x = 3^2 = 9 .$$

よって,

$$\lim_{x \to 2} (x^4 + 3^x) = \lim_{x \to 2} x^4 + \lim_{x \to 2} 3^x = 16 + 9 = 25 .$$

終

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 5$ のときの $x^2 \log_3 x$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \to 5$ のときの $x^2 \log_3 x$ の極限を調べる.

冪関数 x^2 及び対数関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\lim_{x \to 5} x^2 = 5^2 = 25 \ , \qquad \lim_{x \to 5} \log_3 x = \log_3 5 \ .$$

例 変数 x について $x \to 5$ のときの $x^2 \log_3 x$ の極限を調べる.

幕関数 x^2 及び対数関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\lim_{x\to 5} x^2 = 5^2 = 25 \ , \qquad \lim_{x\to 5} \log_3 x = \log_3 5 \ .$$

よって,

$$\lim_{x\to 5}(x^2 \log_3 x) = \left(\lim_{x\to 5} x^2\right)\left(\lim_{x\to 5} \log_3 x\right) = 25 \log_3 5 \ .$$

終

例えば次のことが導かれる：変数 x と無関係な定数 a, k について，

$\displaystyle\lim_{x\to a} k = k$ なので，関数 f について，$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+k\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} + \lim_{x\to a} k = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} + k \ ,$$

$$\lim_{x\to a}\{k\,f(x)\} = \left(\lim_{x\to a} k\right)\lim_{x\to a} f(x) = k\lim_{x\to a} f(x) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2 - 5x + 4$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2 - 5x + 4$ の極限を調べる.

冪関数 x^2, $x = x^1$ は連続なので,

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9 \ , \qquad \lim_{x \to 3} x = 3 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2 - 5x + 4$ の極限を調べる.

冪関数 x^2，$x = x^1$ は連続なので,

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9 \ , \qquad \lim_{x \to 3} x = 3 \ .$$

よって

$$\lim_{x \to 3} (2x^2) = 2 \lim_{x \to 3} x^2 = 2 \cdot 9 = 18 \ , \qquad \lim_{x \to 3} (5x) = 5 \lim_{x \to 3} x = 5 \cdot 3 = 15 \ .$$

例 変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2 - 5x + 4$ の極限を調べる.

冪関数 x^2, $x = x^1$ は連続なので,

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9 \ , \qquad \lim_{x \to 3} x = 3 \ .$$

よって

$$\lim_{x \to 3} (2x^2) = 2 \lim_{x \to 3} x^2 = 2 \cdot 9 = 18 \ , \qquad \lim_{x \to 3} (5x) = 5 \lim_{x \to 3} x = 5 \cdot 3 = 15 \ .$$

従って

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 - 5x + 4) = \lim_{x \to 3} (2x^2) - \lim_{x \to 3} (5x) + \lim_{x \to 3} 4 = 18 - 15 + 4 = 7 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2 - 5x + 4$ の極限を調べる.

幂関数 x^2, $x = x^1$ は連続なので,

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9 \ , \qquad \lim_{x\to 3} x = 3 \ .$$

よって

$$\lim_{x\to 3}(2x^2) = 2\lim_{x\to 3} x^2 = 2\cdot 9 = 18 \ , \qquad \lim_{x\to 3}(5x) = 5\lim_{x\to 3} x = 5\cdot 3 = 15 \ .$$

従って

$$\lim_{x\to 3}(2x^2 - 5x + 4) = \lim_{x\to 3}(2x^2) - \lim_{x\to 3}(5x) + \lim_{x\to 3} 4 = 18 - 15 + 4 = 7 \ .$$

このように, 本来は, 極限値 $\lim_{x\to 3} x^2$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 3}(2x^2)$ を調べ, 極限値 $\lim_{x\to 3} x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 3}(5x)$ を調べ, それから極限値 $\lim_{x\to 3}(2x^2 - 5x + 4)$ を調べなければならない.

例 変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2 - 5x + 4$ の極限を調べる.

冪関数 x^2, $x = x^1$ は連続なので,

$$\lim_{x\to3} x^2 = 3^2 = 9 \ , \qquad \lim_{x\to3} x = 3 \ .$$

よって

$$\lim_{x\to3}(2x^2) = 2\lim_{x\to3} x^2 = 2\cdot 9 = 18 \ , \qquad \lim_{x\to3}(5x) = 5\lim_{x\to3} x = 5\cdot 3 = 15 \ .$$

従って

$$\lim_{x\to3}(2x^2 - 5x + 4) = \lim_{x\to3}(2x^2) - \lim_{x\to3}(5x) + \lim_{x\to3} 4 = 18 - 15 + 4 = 7 \ .$$

このように,本来は,極限値 $\lim_{x\to3} x^2$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to3}(2x^2)$ を調べ,極限値 $\lim_{x\to3} x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to3}(5x)$ を調べ,それから極限値 $\lim_{x\to3}(2x^2 - 5x + 4)$ を調べなければならない.しかしそのような記述を略して単に次のように計算することがある:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}(2x^2 - 5x + 4) &= \lim_{x\to3}(2x^2) - \lim_{x\to3}(5x) + 4 = 2\lim_{x\to3} x^2 - 5\lim_{x\to3} x + 4 \\ &= 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 4 = 7 \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to \dfrac{\pi}{3}$ のときの $\dfrac{5\sin x}{\cos x + 2}$ の極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to \dfrac{\pi}{3}$ のときの $\dfrac{5\sin x}{\cos x + 2}$ の極限を調べる.

三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to \dfrac{\pi}{3}$ のときの $\dfrac{5\sin x}{\cos x + 2}$ の極限を調べる.

三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

よって,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (5\sin x) = 5 \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = 5\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (\cos x + 2) = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to \dfrac{\pi}{3}$ のときの $\dfrac{5\sin x}{\cos x + 2}$ の極限を調べる.

三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

よって,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (5\sin x) = 5\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin x = 5\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\cos x + 2) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

故に

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{5\sin x}{\cos x + 2} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (5\sin x)}{\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\cos x + 2)} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \sqrt{3}.$$

このように，本来は，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$ を調べてから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)$ を調べ，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$ を調べてから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2)$ を調べ，それから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x+2}$ を調べなければならない．

このように，本来は，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$ を調べてから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)$ を調べ，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$ を調べてから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2)$ を調べ，それから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x+2}$ を調べなければならない．しかしそのような記述を略して単に次のように計算することがある：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x+2}&=\frac{\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)}{\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x+2)}=\frac{5\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x}{\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x+2}=\frac{5\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+2}=\frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+2}\\&=\sqrt{3}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}2.3.1}$ 変数 x について $x \to \frac{\pi}{6}$ のときの $\dfrac{\sin x}{3} - \sqrt{3}\cos x$ の極限を調べよ.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{3}-\sqrt{3}\cos x\right) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \qquad\qquad - \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\qquad\qquad\qquad \right) \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}}{\qquad\qquad\quad} - \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\sin}{\qquad\quad} - \qquad \cos \qquad = \\
&= \qquad .
\end{aligned}$$

$\boxed{問2.3.1}$ 変数 x について $x \to \frac{\pi}{6}$ のときの $\frac{\sin x}{3} - \sqrt{3}\cos x$ の極限を調べよ.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{3} - \sqrt{3}\cos x\right) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{3} - \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{3}\cos x\right) \\
&= \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x}{3} - \sqrt{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x \\
&= \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} \\
&= -\frac{4}{3}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}2.3.2}$ 変数 x について $x \to \sqrt{7}$ のときの $(x^2+1)\log_7 x$ の極限を調べよ.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\sqrt{7}}\{(x^2+1)\log_7 x\} &= \lim_{x\to\sqrt{7}}\left(\qquad\qquad\right)\cdot\lim_{x\to\sqrt{7}} \\
&= \left(\qquad\qquad\qquad\right) \qquad\qquad = \quad . \\
&= \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{問2.3.2}$ 変数 x について $x \to \sqrt{7}$ のときの $(x^2+1)\log_7 x$ の極限を調べよ.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\sqrt{7}}\{(x^2+1)\log_7 x\} &= \lim_{x\to\sqrt{7}}(x^2+1)\cdot\lim_{x\to\sqrt{7}}\log_7 x \\
&= \left(\sqrt{7}^2+1\right)\log_7\sqrt{7} = 8\cdot\frac{1}{2} \\
&= 4\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

定理　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a に対して，変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) .$$

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限を調べる.

冪関数 x^2 は連続なので $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$, よって

$$\lim_{x\to 3}(x^2+4) = \lim_{x\to 3} x^2 + 4 = 9+4 = 13 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限を調べる．

冪関数 x^2 は連続なので $\lim_{x\to3} x^2 = 3^2 = 9$ ，よって

$$\lim_{x\to3}(x^2+4) = \lim_{x\to3} x^2 + 4 = 9+4 = 13\ .$$

対数関数 $\log_2 x$ は 13 において連続なので，

$$\lim_{x\to3}\log_2(x^2+4) = \log_2\left\{\lim_{x\to3}(x^2+4)\right\} = \log_2 13\ .$$

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする．定数 a に対して，変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限を調べる.

冪関数 x^2 は連続なので $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$ ，よって

$$\lim_{x\to 3}(x^2+4) = \lim_{x\to 3} x^2 + 4 = 9+4 = 13 \ .$$

対数関数 $\log_2 x$ は 13 において連続なので,

$$\lim_{x\to 3}\log_2(x^2+4) = \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2 13 \ .$$

このように，本来は，まず極限値 $\lim_{x\to 3} x^2$ を調べ，次に極限値 $\lim_{x\to 4}(x^2+4)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to 4}\log_2(x^2+4)$ を調べなければならない.

例 変数 x について $x \to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限を調べる.

幂関数 x^2 は連続なので $\displaystyle\lim_{x\to3} x^2 = 3^2 = 9$, よって

$$\lim_{x\to3}(x^2+4) = \lim_{x\to3} x^2 + 4 = 9+4 = 13 \ .$$

対数関数 $\log_2 x$ は 13 において連続なので,

$$\lim_{x\to3}\log_2(x^2+4) = \log_2\left\{\lim_{x\to3}(x^2+4)\right\} = \log_2 13 \ .$$

このように, 本来は, まず極限値 $\displaystyle\lim_{x\to3} x^2$ を調べ, 次に極限値 $\displaystyle\lim_{x\to4}(x^2+4)$ を調べ, それから極限値 $\displaystyle\lim_{x\to4}\log_2(x^2+4)$ を調べなければならない. しかしそのような記述を略して次のように計算することがある:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\log_2(x^2+4) &= \log_2\left\{\lim_{x\to3}(x^2+4)\right\} = \log_2\left\{\lim_{x\to3}(x^2+4)\right\} = \log_2(9+4) \\ &= \log_2 13 \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問2.3.3}$ 変数 x について $t \to \dfrac{3}{2}$ のときの $\cos\dfrac{\pi t^2}{3}$ の極限を調べなさい.

余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to\frac{3}{2}} \cos\frac{\pi t^2}{3} = \cos\left(\lim_{t\to\frac{3}{2}} \qquad\qquad \right) = \cos \qquad = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問 2.3.4}$ 変数 x について $t \to \frac{3}{2}$ のときの $\cos\frac{\pi t^2}{3}$ の極限を調べなさい.

余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to\frac{3}{2}} \cos\frac{\pi t^2}{3} = \cos\left(\lim_{t\to\frac{3}{2}} \frac{\pi t^2}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問2.3.5}$ 変数 y について $y \to -1$ のときの $\tan^{-1}\sqrt{2y+5}$ の極限を調べなさい.

逆正接関数 $\tan^{-1}x$ 及び関数 $\sqrt{x}$ は連続なので,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to -1}\tan^{-1}\sqrt{2y+5} &= \tan^{-1}\left(\lim_{y\to -1} \qquad\qquad\right)\\ &= \tan^{-1}\sqrt{\lim_{y\to -1}(\qquad\quad)} = \tan^{-1} \\ \\ &= \qquad .\end{aligned}$$

$\boxed{問2.3.5}$ 変数 y について $y \to -1$ のときの $\tan^{-1}\sqrt{2y+5}$ の極限を調べなさい.

逆正接関数 $\tan^{-1}x$ 及び関数 $\sqrt{x}$ は連続なので,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to-1}\tan^{-1}\sqrt{2y+5} &= \tan^{-1}\left(\lim_{y\to-1}\sqrt{2y+5}\right) \\ &= \tan^{-1}\sqrt{\lim_{y\to-1}(2y+5)} = \tan^{-1}\sqrt{3} \\ &= \frac{\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

定理　変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x)=g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x \to a$ のとき $y \to b$，$y \neq b$ とする． $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y)\ .$$

　つまり，大雑把にいうと，変数 x と y とについて，$x \to a$ のとき $y \to b$ であるならば，$\lim\limits_{x\to a}$ を $\lim\limits_{y\to b}$ で置き換えることができる．

今回の極限値の計算では，結局は実数 a における関数 f の連続性 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を用いた．しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある．