2.4 関数の極限の計算

関数 f 及び定数 a について，a を除く f の定義域の内で a に限りなく近づくことができて，

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，次のように書き表す：

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to c\ .$$

関数 f 及び定数 a について，a を除く f の定義域の内で a に限りなく近づくことができて，

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，次のように書き表す：

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to c \ .$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき，c を $f(x)$ の極限（値）といい，$\lim_{x \to a} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x \to a} f(x) = c$ ．

関数 f 及び定数 a について，a を除く f の定義域の内で a に限りなく近づくことができて，

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づくとき，x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，次のように書き表す：

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to c\ .$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき，c を $f(x)$ の極限（値）といい，$\lim_{x \to a} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x \to a} f(x) = c$ ．a が f の定義域に属すときは $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であることが多い：$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるとき，a において f は連続であるという.

前回扱った極限値の計算では，結局は実数 a における関数 f の連続性 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ を用いて計算した．しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある．

前回扱った極限値の計算では，結局は実数 a における関数 f の連続性 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ を用いて計算した．しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある．

次のことに注意すること：

関数の独立変数 x 及び定数 a について，$x \to a$ のとき $x \neq a$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考える.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考える.

$\displaystyle\lim_{x\to3}(x-3)=3-3=0$ なので, $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ を $\dfrac{\displaystyle\lim_{x\to3}(x^2-9)}{\displaystyle\lim_{x\to3}(x-3)}$ に変形できない. そこで以下のように計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考える.

$\displaystyle\lim_{x\to 3}(x-3) = 3-3 = 0$ なので, $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ を $\dfrac{\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2-9)}{\displaystyle\lim_{x\to 3}(x-3)}$ に変形できない. そこで以下のように計算する.

x^2-9 を因数分解すると $x^2-9 = (x+3)(x-3)$. $x \to 3$ のとき, $x \neq 3$ つまり $x-3 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3 \ .$$

例 変数 x について $x \to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考える.

$\lim_{x\to 3}(x-3) = 3-3 = 0$ なので, $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ を $\dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim_{x\to 3}(x-3)}$ に変形できない. そこで以下のように計算する.

x^2-9 を因数分解すると $x^2-9=(x+3)(x-3)$. $x\to 3$ のとき, $x \neq 3$ つまり $x-3\neq 0$ なので,

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3 \ .$$

よって

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6 \ .$$

終

このように，変数 x の整式 $A(x)$，$B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，因数定理より，整式 $x-a$ が $A(x)$，$B(x)$ の因数である；

このように，変数 x の整式 $A(x)$，$B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，因数定理より，整式 $x-a$ が $A(x)$，$B(x)$ の因数である；極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{A(x)}{B(x)}$ を求めるために，分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を $x-a$ で約分することが多い．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 1$ のときの $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$ の極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 1$ のときの $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$ の極限を調べる.

$x \to 1$ のとき, $x \neq 1$ より $x-1 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+4}{x-3} .$$

例 変数 x について $x \to 1$ のときの $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$ の極限を調べる.

$x \to 1$ のとき, $x \neq 1$ より $x-1 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+4}{x-3} \ .$$

よって

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to1}\frac{x+4}{x-3} = \frac{\lim_{x\to1}(x+4)}{\lim_{x\to1}(x-3)} = \frac{1+4}{1-3} = \frac{5}{-2}$$

$$= -\frac{5}{2} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}2.4.1}$ 変数 u について $u \to -2$ のときの $\dfrac{u^2-u-6}{u+2}$ の極限を調べよ.

$u \neq -2$ のとき

$$\frac{u^2-u-6}{u+2} = \frac{(\qquad)(\qquad)}{} = \qquad .$$

よって

$$\lim_{u\to -2}\frac{u^2-u-6}{u+2} = \lim_{u\to -2}(\qquad) = \qquad = \qquad .$$

$\boxed{問 2.4.1}$ 変数 u について $u \to -2$ のときの $\dfrac{u^2-u-6}{u+2}$ の極限を調べよ.

$u \neq -2$ のとき

$$\frac{u^2-u-6}{u+2} = \frac{(u+2)(u-3)}{u+2} = u-3 \ .$$

よって

$$\lim_{u \to -2} \frac{u^2-u-6}{u+2} = \lim_{u \to -2} (u-3) = -2-3 = -5 \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 2.4.2}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(\qquad\quad)(\qquad\quad)}{(\qquad\quad)(\qquad\quad)} = \lim_{x\to 3}\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(\qquad\qquad)}{\lim\limits_{x\to 3}(\qquad\qquad)} =$$

$$= \qquad .$$

$\boxed{\text{問}2.4.2}$ 変数 x について $x \to 3$ のときの $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x-2} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 3}(2x+1)}{\displaystyle\lim_{x\to 3}(x-2)} = \frac{7}{1}$$

$$= 7\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.4.3}$ 変数 t について $t \to 1$ のときの $\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}$ の極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{t\to 1}(t^2-2t+3) = 2 \neq 0$ なので,

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3} = \frac{}{} = \qquad = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}2.4.3}$ 変数 t について $t \to 1$ のときの $\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}$ の極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{t\to1}(t^2-2t+3)=2\neq0$ なので,

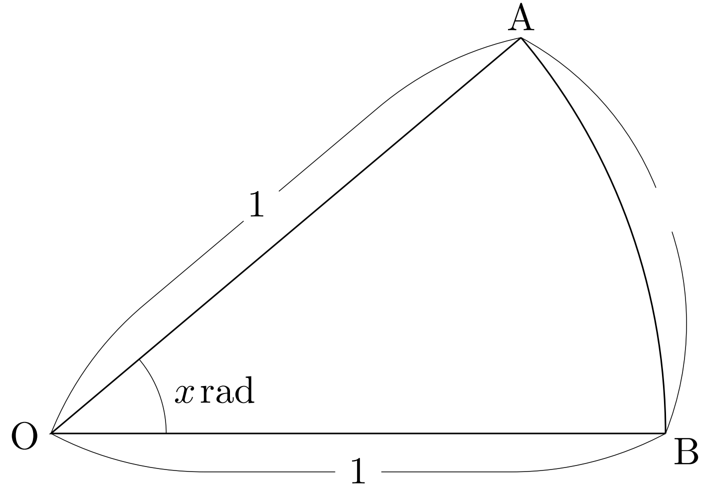
$$\lim_{t\to1}\frac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}=\frac{\displaystyle\lim_{t\to1}(t^2-3t+2)}{\displaystyle\lim_{t\to1}(t^2-2t+3)}=\frac{0}{2}=0\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

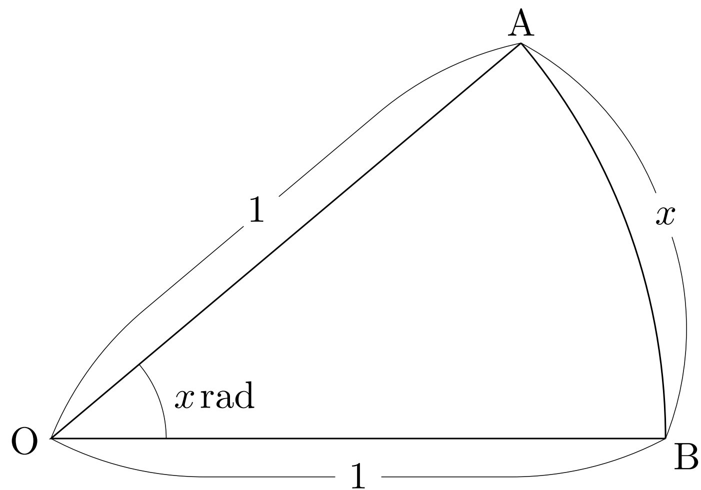
変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる．

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．右図のように，点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり，中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとする．弧 AB の長さは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \quad$ ．



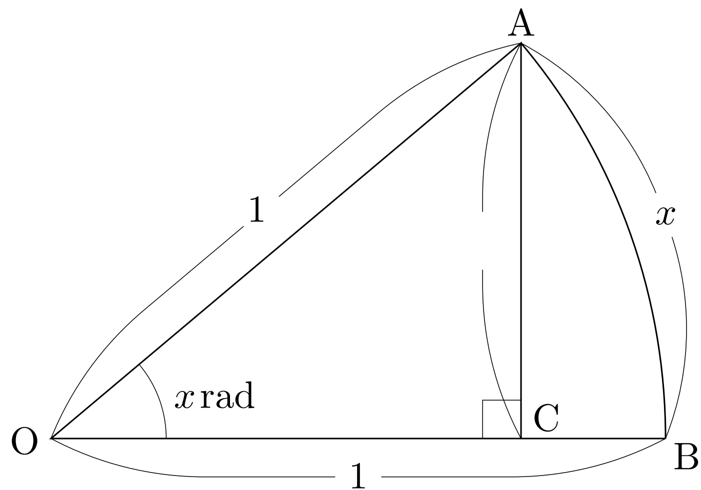
変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる．

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．右図のように，点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり，中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとする．弧 AB の長さは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = x$ ．



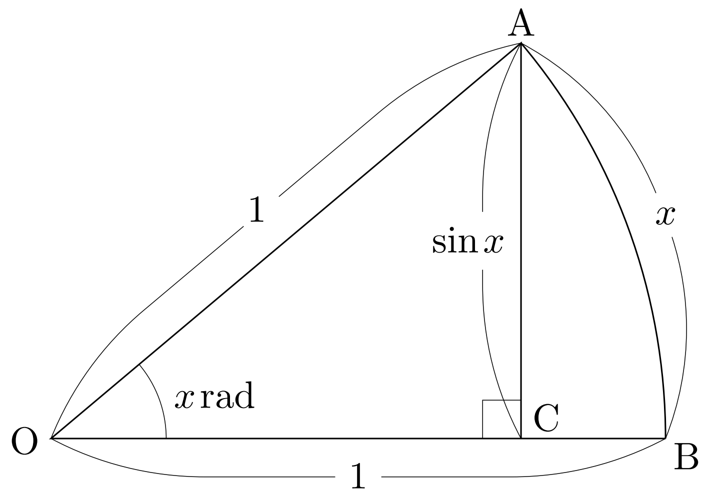
変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる．

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．右図のように，点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり，中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとする．弧 AB の長さは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = x$ ．点 C は線分 OB に属し，直線 OB と直線 AC とは垂直であるとする．線分 AC の長さは $\overline{\mathrm{AC}} =$ 　　　　．



変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

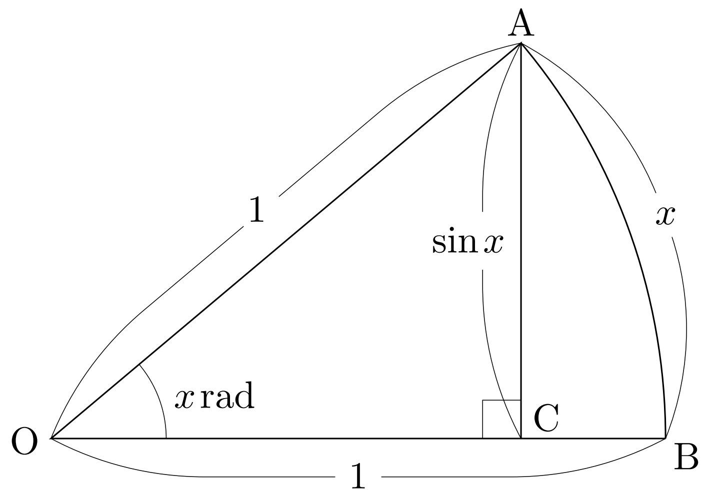
$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする. 右図のように, 点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり, 中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとする. 弧 AB の長さは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = x$. 点 C は線分 OB に属し, 直線 OB と直線 AC とは垂直であるとする. 線分 AC の長さは $\overline{\mathrm{AC}} = \sin x$.



変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べる．

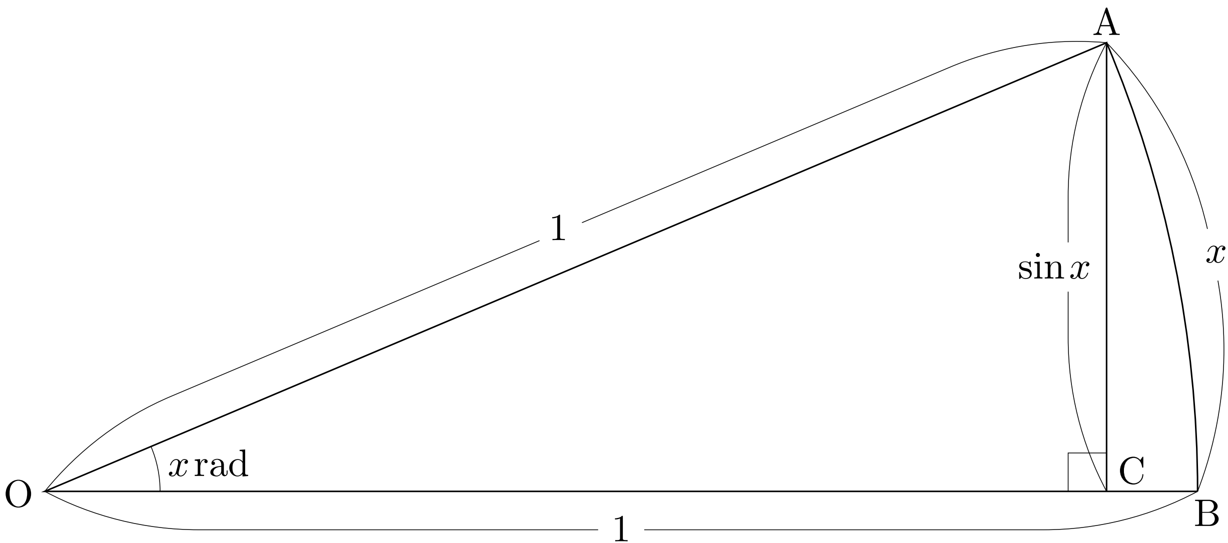
$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．右図のように，点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり，中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとする．弧 AB の長さは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = x$ ．点 C は線分 OB に属し，直線 OB と直線 AC とは垂直であるとする．線分 AC の長さは $\overline{\mathrm{AC}} = \sin x$ ．よって

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = \frac{\sin x}{x} .$$



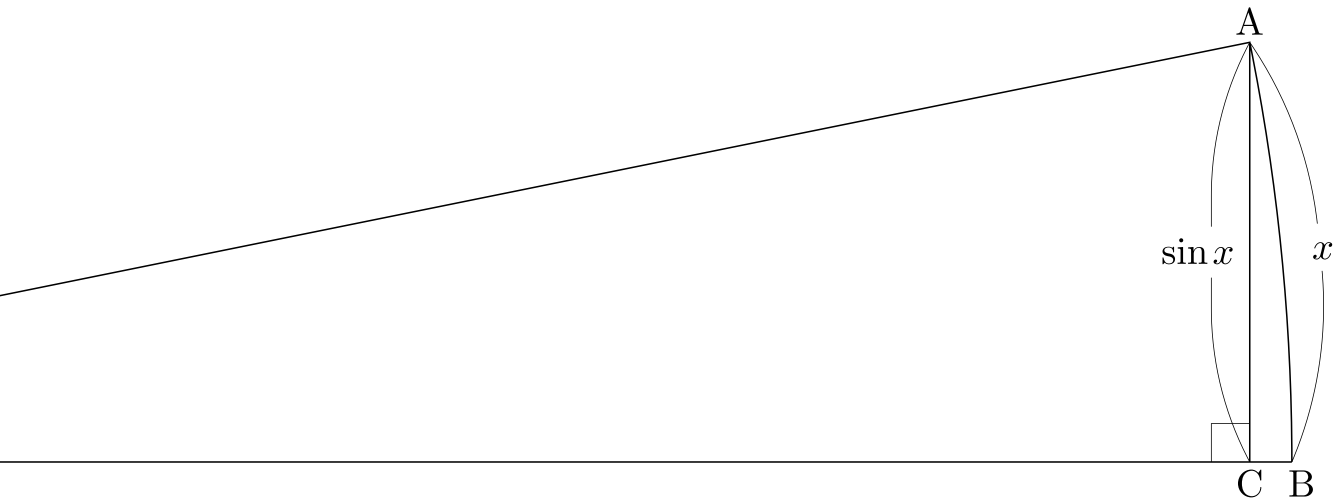
$x = 0.4$ のとき，以下の図のようになり，

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \fallingdotseq 0.9735.$$



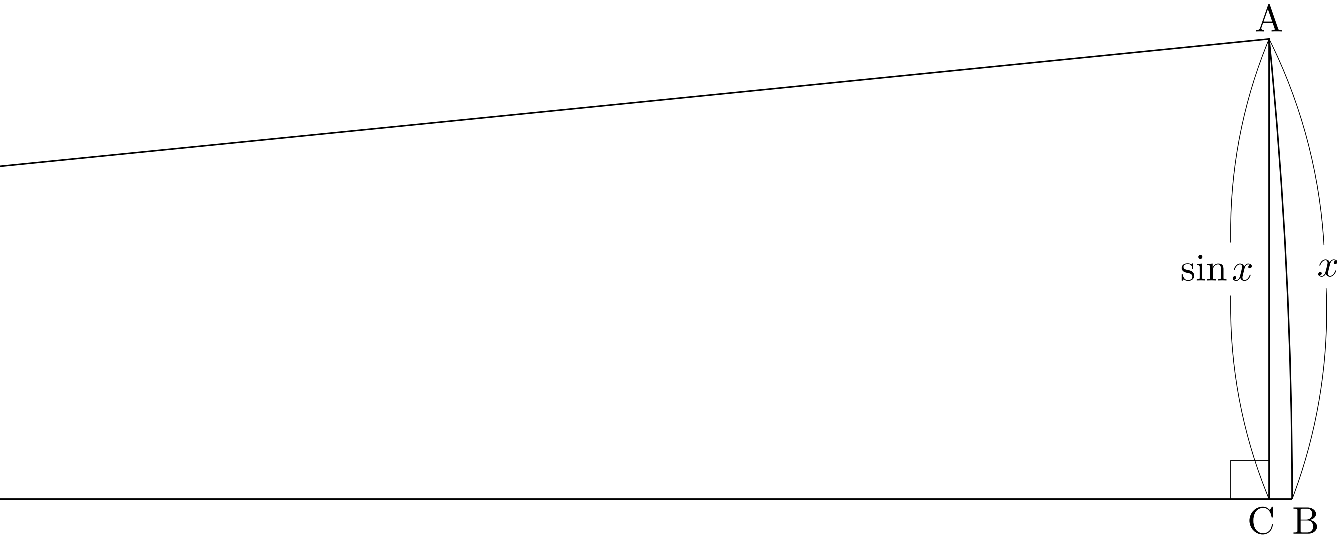
$x = 0.2$ のとき，A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり，

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overparen{\mathrm{AB}}} \fallingdotseq 0.9933.$$



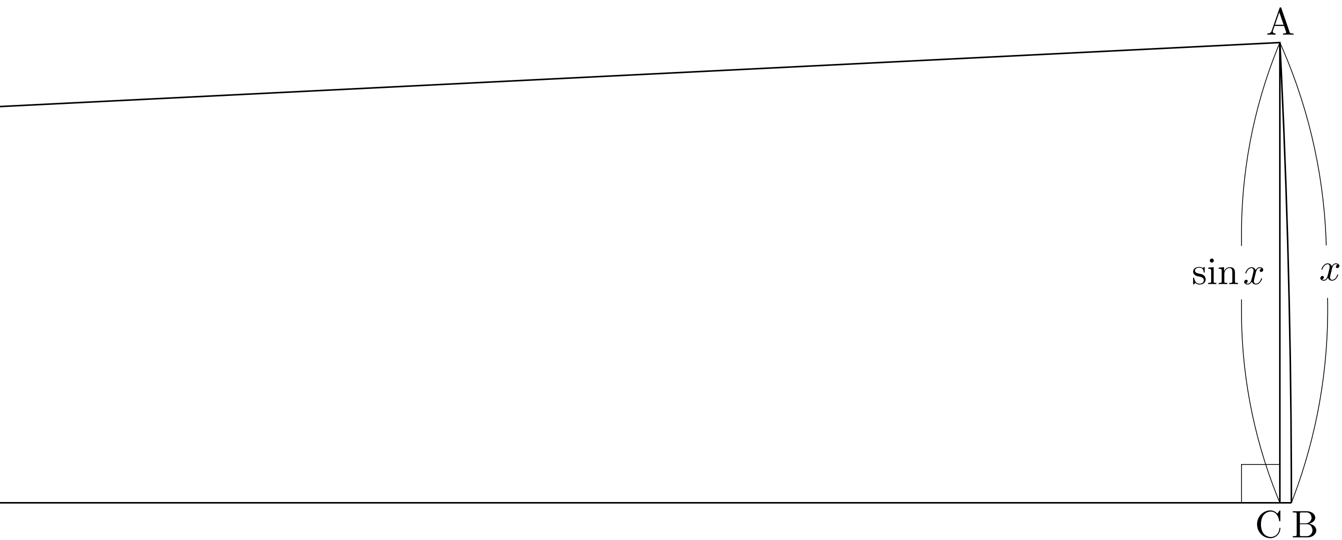
$x = 0.1$ のとき，A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり，

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \fallingdotseq 0.9983.$$



$x = 0.05$ のとき，A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり，

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \fallingdotseq 0.9996.$$



このように，変数 x の値を 0 に限りなく近づけると，$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}$ の値は 1 に限りなく近づく．

このように，変数 x の値を 0 に限りなく近づけると，$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}$ の値は 1 に限りなく近づく．このようにして次の定理が成り立つ．

定理　変数 x について $x \to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は 1 に収束する：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $x = \dfrac{y}{3}$ なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} \quad .$$

例 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $x = \frac{y}{3}$ なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\dfrac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} \quad .$$

$x \to 0$ のとき, $y = 3x \to 0$, $y \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y \to 0} \left(3 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) \qquad\qquad .$$

変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, 定数 a と b とについて, 変数 x について $x \to a$ のとき $y \to b$, $y \neq b$ とする. $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,
$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to b} g(y)$.

例 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $x = \dfrac{y}{3}$ なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} \ .$$

$x \to 0$ のとき, $y = 3x \to 0$, $y \neq 0$. $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y \to 0} \left(3 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) = 3 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \cdot 1 = 3 \ .$$

終

$\boxed{問 2.4.4}$ 変数 t について $t \to 0$ のときの $\dfrac{\sin \frac{t}{4}}{t}$ の極限を調べよ.

変数 x を $x =$ とおく. $t =$. $t \to 0$ のとき $x \to 0$ なので、

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{t} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\quad} = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \quad \cdot 1 = \quad .$$

$\boxed{問2.4.4}$ 変数 t について $t \to 0$ のときの $\dfrac{\sin\frac{t}{4}}{t}$ の極限を調べよ.

変数 x を $x = \dfrac{t}{4}$ とおく. $t = 4x$. $t \to 0$ のとき $x \to 0$ なので、

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{4}}{t} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \dfrac{y}{5}$.

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \dfrac{y}{5}$.

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x} = \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} = \frac{\sin y}{\dfrac{y}{5}} \cdot \frac{1}{\cos y} = \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{\cos y} \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \dfrac{y}{5}$.

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x} = \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} = \frac{\sin y}{\dfrac{y}{5}} \cdot \frac{1}{\cos y} = \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{\cos y} \ .$$

$x \to 0$ のとき $y = 5x \to 0$. $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. 関数 $\cos x$ は連続なので $\displaystyle\lim_{y \to 0} \cos y = \cos 0 = 1$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \dfrac{y}{5}$.

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x} = \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} = \frac{\sin y}{\dfrac{y}{5}} \cdot \frac{1}{\cos y} = \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{\cos y} .$$

$x \to 0$ のとき $y = 5x \to 0$. $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. 関数 $\cos x$ は連続なので $\displaystyle\lim_{y \to 0} \cos y = \cos 0 = 1$. よって

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{x} &= \lim_{y \to 0} \left(\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{\cos y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{\displaystyle\lim_{y \to 0} \cos y} = 1 \cdot \frac{5}{1} \\ &= 5 .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.4.5}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan\frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べよ.

変数 y を $y =$ 　　 とおく. $x =$ 　　 .

$$\frac{\tan\frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{\quad} = \frac{1}{\quad}\frac{\sin y}{\cos y} = \quad \frac{\sin y}{y}\frac{1}{\qquad} .$$

$x \to 0$ のとき $y \to 0$. $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{3}}{x} = \lim_{y\to 0}\left(\quad \frac{\sin y}{y}\frac{1}{\qquad}\right) = \quad \cdot \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0}\qquad} = \quad \cdot 1 \cdot \frac{1}{\quad}$$

$$= \quad .$$

$\boxed{問2.4.5}$ 変数 x について $x \to 0$ のときの $\dfrac{\tan\frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べよ.

変数 y を $y = \dfrac{x}{3}$ とおく. $x = 3y$.

$$\frac{\tan\frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{3y} = \frac{1}{3y}\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{3}\frac{\sin y}{y}\frac{1}{\cos y} .$$

$x \to 0$ のとき $y \to 0$. $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{3}}{x} &= \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin y}{y}\frac{1}{\cos y}\right) = \frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\cos y} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{3} .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$