## 2.7 微分係数

関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを $a$ における $f$ の微分係数といった．

関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，極限値 $\lim_{t \to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを $a$ における $f$ の微分係数といった．ここで，変数 $t$ に対して変数 $h$ を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} .$$

関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを $a$ における $f$ の微分係数といった．ここで，変数 $t$ に対して変数 $h$ を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき， $h=t-a\to 0$ ， $h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

変数 $x$ の関数 $f(x)$ と変数 $y$ の関数 $g(y)$ とについて， $f(x)=g(y)$ で，定数 $a$ と $b$ とについて，変数 $x$ について $x\to a$ のとき $y\to b$ ， $y\neq b$ とする． $y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{y\to b}g(y)\ .$$

関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを $a$ における $f$ の微分係数といった．ここで，変数 $t$ に対して変数 $h$ を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき， $h=t-a\to 0$ ，$h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，

$$a\ \text{における}\ f\ \text{の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを $a$ における $f$ の微分係数といった．ここで，変数 $t$ に対して変数 $h$ を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき， $h=t-a\to 0$ ， $h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 $f$ の定義域の実数 $a$ に対して，

$$a\text{ における }f\text{ の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ より極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の方が計算し易いことが多いので，微分係数を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と定義する．

**定義**　関数 $f$ の定義域の実数 $a$ について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 $f$ は $a$ において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を $a$ における $f$ の微分係数という.

例 実数全体を定義域とする関数 $g$ を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$2$ における関数 $g$ の微分係数を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $g$ を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$2$ における関数 $g$ の微分係数を調べる．

$2$ における関数 $g$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$ である．

例 実数全体を定義域とする関数 $g$ を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$2$ における関数 $g$ の微分係数を調べる．

$2$ における関数 $g$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$ である．

$$\begin{aligned} g(2+h)-g(2) &= 3(2+h)^2 - 5(2+h) - (3\cdot 2^2 - 5\cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h \\ &= 7h + 3h^2 \ , \end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 $g$ を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$2$ における関数 $g$ の微分係数を調べる．

$2$ における関数 $g$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$ である．

$$
\begin{aligned}
g(2+h)-g(2) &= 3(2+h)^2-5(2+h)-(3\cdot 2^2-5\cdot 2) = 12h+3h^2-5h \\
&= 7h+3h^2 \ ,
\end{aligned}
$$

よって，$2$ における関数 $g$ の微分係数は

$$
\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{7h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(7+3h) = 7 \ .
$$

終

$\boxed{問 2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 $f$ を $f(x)=2x^2-7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$5$ における関数 $f$ の微分係数を調べよ．

$5$ における関数 $f$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$ である．

$\boxed{\text{問}2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 $f$ を $f(x)=2x^2-7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 $f$ の微分係数を調べよ．

5 における関数 $f$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$ である．

$$f(5+h)-f(5)= \qquad\qquad\qquad\qquad = $$

$$= \qquad\qquad ,$$

5 における関数 $f$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}=\lim_{h\to 0}(\qquad\qquad)= \qquad .$$

$\boxed{\text{問}2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 $f$ を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$5$ における関数 $f$ の微分係数を調べよ．

$5$ における関数 $f$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$ である．

$$
\begin{aligned}
f(5+h)-f(5) &= 2(5+h)^2 - 7(5+h) - (2\cdot 5^2 - 7\cdot 5) = 20h + 2h^2 - 7h \\
&= 2h^2 + 13h \ ,
\end{aligned}
$$

$5$ における関数 $f$ の微分係数は

$$
\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+13h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+13) = 13 \ .
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\psi$ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って, $4$ における関数 $\psi$ の微分係数を調べる.

$\boxed{例}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\psi$ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って, $4$ における関数 $\psi$ の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4)&=\frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot 4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6h}{7(3h+7)}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\psi$ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って, $4$ における関数 $\psi$ の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4)&=\frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot 4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6h}{7(3h+7)}\ .\end{aligned}$$

$4$ における関数 $\psi$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{6}{7(3h+7)}$$

例 $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\psi$ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って, $4$ における関数 $\psi$ の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4)&=\frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot 4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6h}{7(3h+7)}\ .\end{aligned}$$

$4$ における関数 $\psi$ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{6}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6}{7\cdot\lim\limits_{h\to 0}(3h+7)}\\&=-\frac{6}{49}\ .\end{aligned}$$

終

問2.7.2 $\frac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\varphi$ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$3$ における関数 $\varphi$ の微分係数を調べよ．

$$\varphi(3+h) - \varphi(3) = \qquad = \qquad = \qquad$$
$$= \qquad .$$

$3$ における関数 $\varphi$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad}{h} = -\lim_{h\to 0} \qquad = -\frac{\qquad}{\lim\limits_{h\to 0}(\qquad)}$$
$$= - \quad .$$

$\boxed{問 2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 $\varphi$ を $\varphi(x)=\dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，$3$ における関数 $\varphi$ の微分係数を調べよ．

$$\begin{aligned}\varphi(3+h)-\varphi(3) &= \frac{5}{4(3+h)-7}-\frac{5}{4\cdot 3-7}=\frac{5}{4h+5}-1=\frac{5-(4h+5)}{4h+5}\\ &= -\frac{4h}{4h+5}\ .\end{aligned}$$

$3$ における関数 $\varphi$ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{4h}{4h+5}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{4}{4h+5}=-\frac{4}{\displaystyle\lim_{h\to 0}(4h+5)}\\ &= -\frac{4}{5}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

関数 $f$ は定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する. $a$ における $f$ の微分係数を $b$ とおく: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ .

関数 $f$ は定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する. $a$ における $f$ の微分係数を $b$ とおく： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ . $\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので,

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

関数 $f$ は定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する. $a$ における $f$ の微分係数を $b$ とおく: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ . $\displaystyle\lim_{h\to 0} h=0$ なので,

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h = b\cdot 0 = 0 \ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ , 従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\} = 0 \ .$$

関数 $f$ は定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する．$a$ における $f$ の微分係数を $b$ とおく：$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ．$\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

更に，$f(a)$ は変数 $h$ と無関係なので，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}f(a+h)&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\}\\&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}+f(a)=0+f(a)\\&=f(a)\ ,\end{aligned}$$

関数 $f$ は定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する．$a$ における $f$ の微分係数を $b$ とおく：$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ． $\displaystyle\lim_{h\to0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to0}h=b\cdot0=0\ .$$

$h\to0$ のとき $h\neq0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

更に，$f(a)$ は変数 $h$ と無関係なので，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}f(a+h)&=\lim_{h\to0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\}\\&=\lim_{h\to0}\{f(a+h)-f(a)\}+f(a)=0+f(a)\\&=f(a)\ ,\end{aligned}$$

つまり $\displaystyle\lim_{h\to0}f(a+h)=f(a)$ ．

定理　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \quad .$$

定理　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)\ .$$

関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する．変数 $h, t$ について $h = t - a$ とする．

定理　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば

$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ .

　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する. 変数 $h, t$ について $h = t - a$ とする. $t = a + h$ より $f(t) = f(a+h)$ であり, $t \to a$ のとき $h \to 0$ なので,

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

定理　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)\ .$$

　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する．変数 $h, t$ について $h = t - a$ とする． $t = a + h$ より $f(t) = f(a+h)$ であり， $t \to a$ のとき $h \to 0$ なので，

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)\ .$$

つまり $f$ は $a$ において連続である．

定理　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば

$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ .

　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であると仮定する．変数 $h, t$ について $h = t - a$ とする． $t = a + h$ より $f(t) = f(a+h)$ であり， $t \to a$ のとき $h \to 0$ なので，

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

つまり $f$ は $a$ において連続である．

定理　関数 $f$ が定義域の実数 $a$ において微分可能であるならば， $f$ は $a$ において連続である．

つまり，関数 $f$ 及び $f$ の定義域の実数 $a$ について，

$$f \text{ が } a \text{ において微分可能} \quad \text{ならば} \quad f \text{ は } a \text{ において連続}$$

である．

つまり，関数 $f$ 及び $f$ の定義域の実数 $a$ について，

$$f \text{ が } a \text{ において微分可能} \quad \text{ならば} \quad f \text{ は } a \text{ において連続}$$

である．しかしこの逆は必ずしも成り立たない：関数 $f$ が $a$ において連続であっても $f$ が $a$ において微分可能でないことがある．