2.9　対数関数の微分係数

対数関数の微分係数を調べるためにまず定理を一つ準備する．その証明は難しいので省略する．

　対数関数の微分係数を調べるためにまず定理を一つ準備する．その証明は難しいので省略する．

定理　0 以外の 0 に近い実数を表す変数 x に対して，$x \to 0$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある正の実数に収束する．

対数関数の微分係数を調べるためにまず定理を一つ準備する．その証明は難しいので省略する．

定理 0 以外の 0 に近い実数を表す変数 x に対して，$x \to 0$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある正の実数に収束する．

実際に変数 x の値を 0 に近づけていくときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値を調べる．

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
0.01	$2.7048138\cdots$
0.0001	$2.7181459\cdots$
0.000001	$2.7182805\cdots$
0.00000001	$2.7182818\cdots$

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
-0.01	$2.7319990\cdots$
-0.0001	$2.7184178\cdots$
-0.000001	$2.7182832\cdots$
-0.00000001	$2.7182818\cdots$

精密に計算すると次のようになる：

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045\cdots \ .$$

変数 x について $x \to 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す：

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045\cdots \ .$$

変数 x について $x \to 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す：

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045\cdots \ .$$

この定数 e は自然対数の底といわれ，解析学において大変重要な定数である．

変数 x について $x \to 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す：

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045\cdots .$$

この定数 e は自然対数の底といわれ，解析学において大変重要な定数である．自然対数の底 $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ は実数であるが有理数ではない；つまり無理数である．自然対数の底 e の値は約 2.72 と覚えよ．

関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

関数 f の定義域の実数 a について， $h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

実数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h}$ を調べる.

関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

実数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h}$ を調べる．対数の性質より

$$\log_a(b+h)-\log_a b = \log_a\frac{b+h}{b} = \log_a\left(1+\frac{h}{b}\right) .$$

関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

実数 a について $a>0$，$a\neq 1$ とする．正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h}$ を調べる．対数の性質より

$$\log_a(b+h)-\log_a b = \log_a\frac{b+h}{b} = \log_a\left(1+\frac{h}{b}\right).$$

$t=\dfrac{h}{b}$ とおく． $h=bt$ なので，

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{t}\log_a(1+t)$$
$$= \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \quad .$$

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \quad .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ で b は正の定数なので， $h \to 0$ のとき， $t \to 0$ ， $t \neq 0$.

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ で b は正の定数なので，$h \to 0$ のとき，$t \to 0$ ，$t \neq 0$ ．従って，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} \qquad .$$

変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x)=g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x \to a$ のとき $y \to b$ ，$y \neq b$ とする．$y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) \ .$$

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ で b は正の定数なので, $h \to 0$ のとき, $t \to 0$, $t \neq 0$. 従って,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ で b は正の定数なので，$h \to 0$ のとき，$t \to 0$ ，$t \neq 0$ ． 従って，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

ここで $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$ なので，

$$\frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b}\log_a\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\log_a e = \frac{\log_a e}{b} \ .$$

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ で b は正の定数なので，$h \to 0$ のとき，$t \to 0$ ，$t \neq 0$ ．従って，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

ここで $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$ なので，

$$\frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b}\log_a\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\log_a e = \frac{\log_a e}{b} \ .$$

故に，対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} \ .$$

自然対数の底 $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.718281828\cdots$ について，$e>0$ かつ $e\neq 1$ なので，正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる．

自然対数の底 $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\cdots$ について，$e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので，正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる．定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数といい，$\ln x$ と書き表す：

$$\ln x = \log_e x \ .$$

自然対数の底 $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\cdots$ について，$e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので，正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる．定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数といい，$\ln x$ と書き表す：

$$\ln x = \log_e x \ .$$

正の実数 b に対して，自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の b における微分係数は，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} \ .$$

自然対数の底 $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\cdots$ について，$e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので，正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる．定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数といい，$\ln x$ と書き表す：

$$\ln x = \log_e x \ .$$

正の実数 b に対して，自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の b における微分係数は，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} \ .$$

このように，自然対数の対数関数の微分係数は簡単な式で表される．

定理　実数 a について $a > 0$ ，$a \neq 0$ とする．正の実数 b に対して，a を底とする対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} \ .$$

特に，自然対数の底 e を底とする対数関数 $\ln x = \log_e x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \frac{1}{b} \ .$$

$\boxed{例}$ 5 における対数関数 $\log_3 x$ の微分係数を求める.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\dfrac{\log_a e}{b}$ である.

例 5 における対数関数 $\log_3 x$ の微分係数を求める.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\dfrac{\log_a e}{b}$ である.

5 における対数関数 $\log_3 x$ の微分係数は $\dfrac{\log_3 e}{5}$ である. 終

問 7 における対数関数 $\log_5 x$ の微分係数を求めよ.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\dfrac{\log_a e}{b}$ である.

問 7 における対数関数 $\log_5 x$ の微分係数を求めよ.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\dfrac{\log_a e}{b}$ である.

7 における対数関数 $\log_5 x$ の微分係数は $\dfrac{\log_5 e}{7}$ である. 終

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える．そのため，正の実数 x の自然対数 $\log_e x$ の底を略して $\log x$ と記す．

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える．そのため，正の実数 x の自然対数 $\log_e x$ の底を略して $\log x$ と記す．つまり，数学では，正の実数 x に対して，$\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を意味する：

$$\log x = \log_e x = \ln x \ .$$

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える．そのため，正の実数 x の自然対数 $\log_e x$ の底を略して $\log x$ と記す．つまり，数学では，正の実数 x に対して，$\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を意味する：

$$\log x = \log_e x = \ln x \ .$$

また，工学では常用対数 $\log_{10} x$ を $\log X$ と略記することがある．なので，$\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を意味するときと常用対数 $\log_{10} x$ を意味するときとがある．