

3.1 導関数

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である.

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

各実数 x に対して, x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる.

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

各実数 x に対して, x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる. よって x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める関数ができる.

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

各実数 x に対して, x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる. よって

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める関数
ができる. この関数を φ の導関数といい, φ' と書き表す.

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

各実数 x に対して, x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる. よって

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める関数

ができる. この関数を φ の導関数といい, φ' と書き表す. φ の導関数 φ' の

値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数 $3x^2$ なので, $\varphi'(x) = 3x^2$.

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

各実数 x に対して, x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる. よって

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める関数

ができる. この関数を φ の導関数といい, φ' と書き表す. φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数 $3x^2$ なので, $\varphi'(x) = 3x^2$. 例えば次のようになる:

2 における導関数 φ' の値 $\varphi'(2) = 12$ は 2 における φ の微分係数である;

5 における導関数 φ' の値 $\varphi'(5) = 75$ は 5 における φ の微分係数である.

例 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める. 各実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である. 例えば,

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 ,$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 ,$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 .$$

各実数 x に対して, x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる. よって

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める関数

ができる. この関数を φ の導関数といい, φ' と書き表す. φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数 $3x^2$ なので, $\varphi'(x) = 3x^2$. 例えば次のようになる:

2 における導関数 φ' の値 $\varphi'(2) = 12$ は 2 における φ の微分係数である;

5 における導関数 φ' の値 $\varphi'(5) = 75$ は 5 における φ の微分係数である.

このように, 導関数とは微分係数を計算するための関数である.

終

一般的に述べる. 関数 f の定義域の実数 x に対して, x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は (あるならば) 唯一つに定まる.

一般的に述べる. 関数 f の定義域の実数 x に対して, x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は (あるならば) 唯一つに定まる. 従って, x に対して x における f の微分係数を定める関数を定義できる. この関数を f の導関数という.

一般的に述べる. 関数 f の定義域の実数 x に対して, x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は (あるならば) 唯一つに定まる. 従って, x に対して x における f の微分係数を定める関数を定義できる. この関数を f の導関数という.

定義 関数 f の導関数とは, f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである. 関数 f の導関数を f' と書き表す.

一般的に述べる. 関数 f の定義域の実数 x に対して, x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は (あるならば) 唯一つに定まる. 従って, x に対して x における f の微分係数を定める関数を定義できる. この関数を f の導関数という.

定義 関数 f の導関数とは, f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである. 関数 f の導関数を f' と書き表す.

関数 f の導関数 f' の実数 x における値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ である, つまり

$$f'(x) = [f \text{ の } x \text{ における微分係数}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

一般的に述べる. 関数 f の定義域の実数 x に対して, x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は (あるならば) 唯一つに定まる. 従って, x に対して x における f の微分係数を定める関数を定義できる. この関数を f の導関数という.

定義 関数 f の導関数とは, f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである. 関数 f の導関数を f' と書き表す.

関数 f の導関数 f' の実数 x における値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ である, つまり

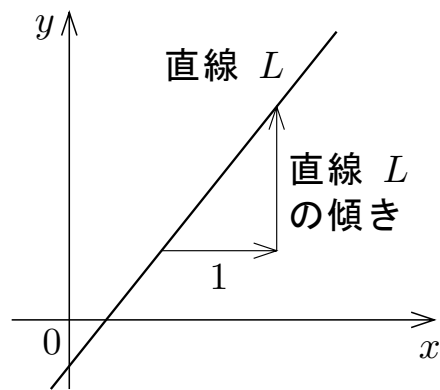
$$f'(x) = [f \text{ の } x \text{ における微分係数}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

関数 f の導関数を求めることを, f を微分するという.

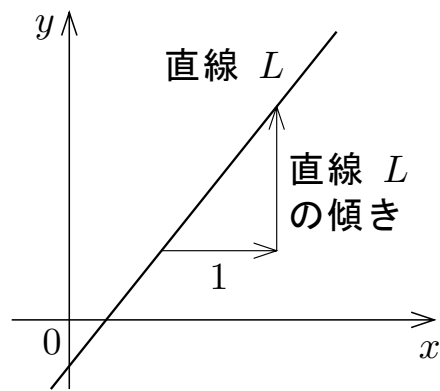
関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数なので, f のグラフの点 $(x, f(x))$ における 接線の傾き である.

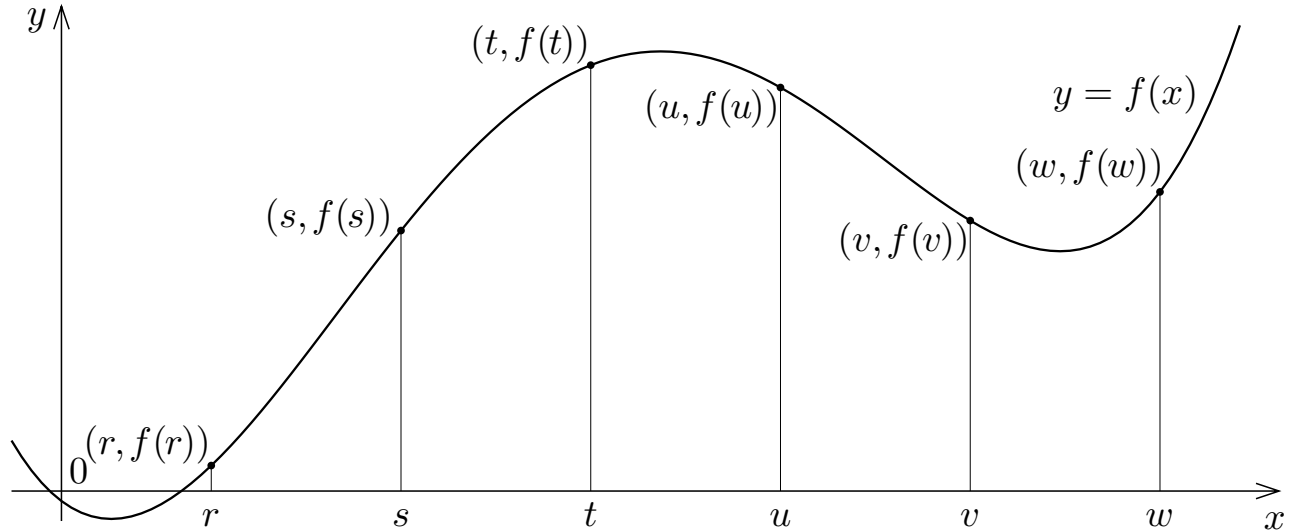
関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数なので, f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きである.

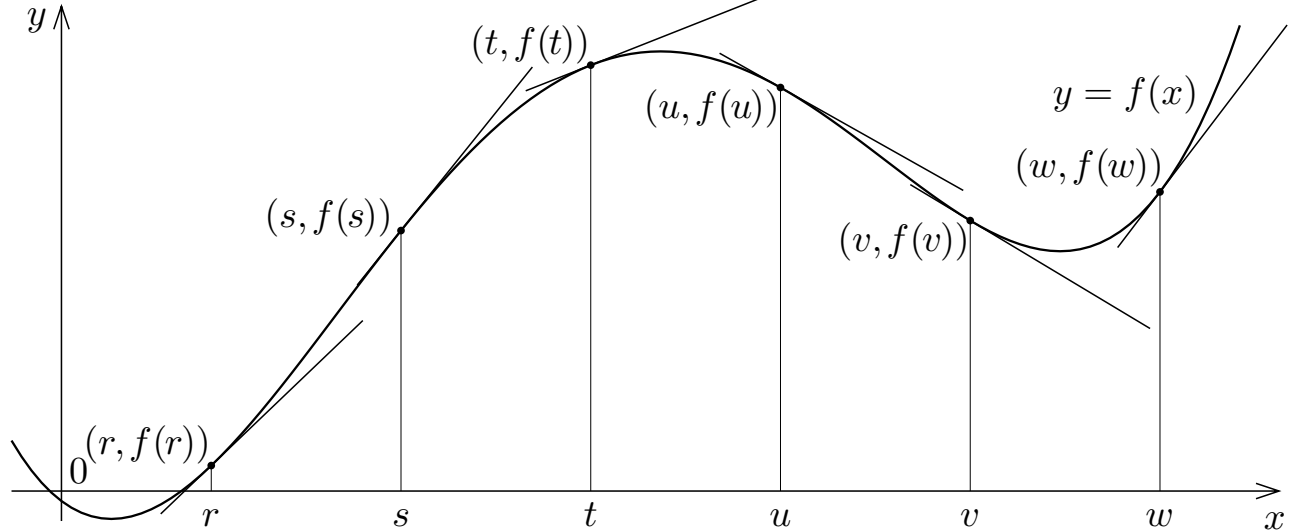
関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数なので、 f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きである。
 xy 座標平面における直線の傾きは、右図のように、 x 座標を 1 だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量である。

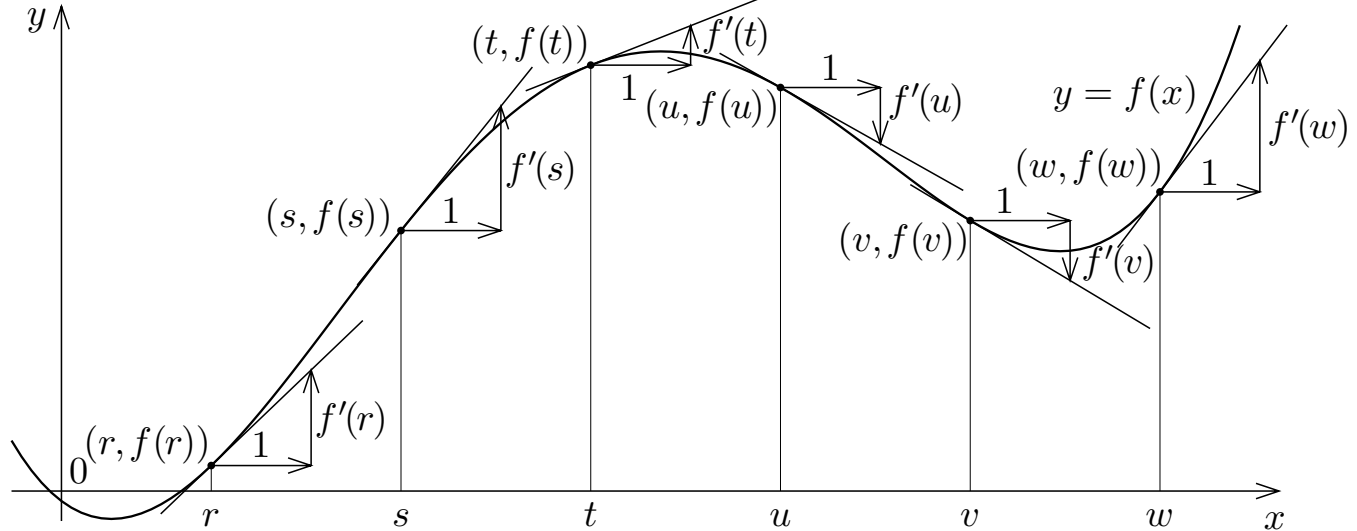


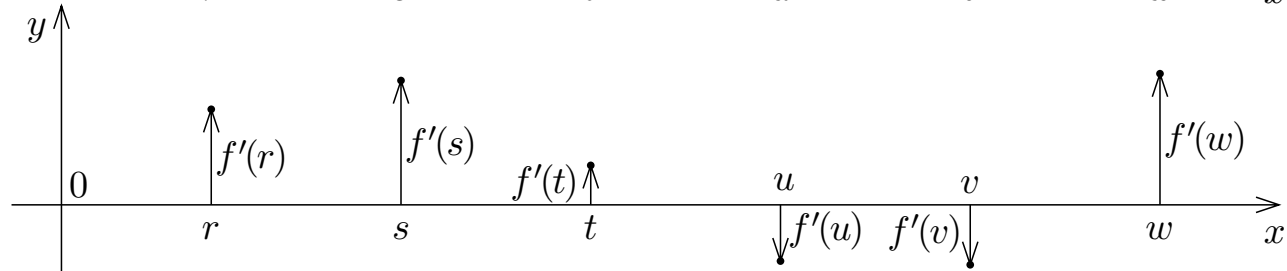
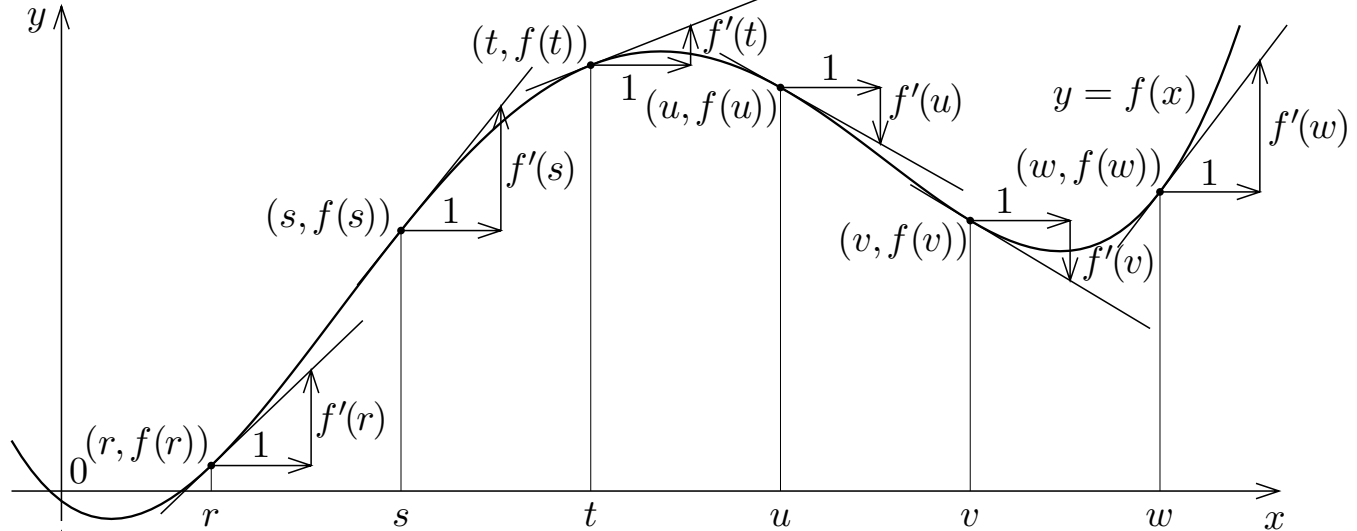
関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数なので、 f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きである。 xy 座標平面における直線の傾きは、右図のように、 x 座標を 1 だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量である。このことより、関数 f のグラフに対する導関数 f' のグラフは例えば次のようになる。

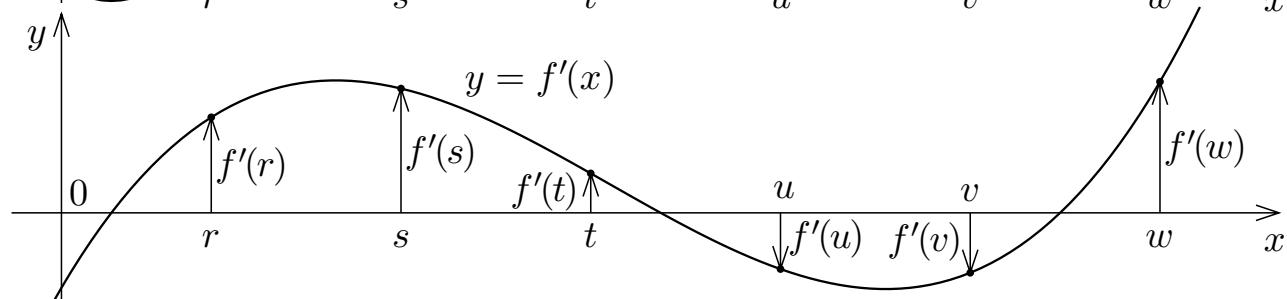
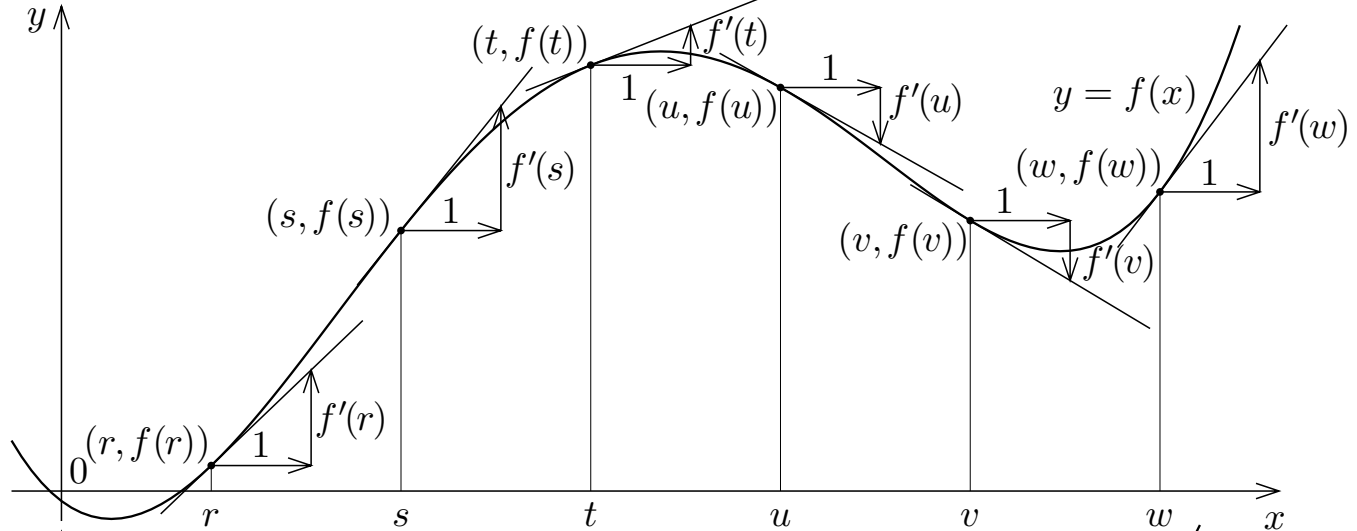












微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す ;

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} ;$$

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す ;

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} ;$$

つまり, $\frac{d}{dx}f(x)$ は $f(x)$ を微分した結果を表す.

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す;

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x};$$

つまり, $\frac{d}{dx}f(x)$ は $f(x)$ を微分した結果を表す.

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\frac{d}{dx}f(x)$ において, $\frac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 x の関数として微分することを表す.

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す;

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x};$$

つまり, $\frac{d}{dx}f(x)$ は $f(x)$ を微分した結果を表す.

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\frac{d}{dx}f(x)$ において, $\frac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 x の関数として微分することを表す. 例えば,

変数 y の冪関数 y^4 の導関数を $\frac{d}{dy}y^4$ と書き表し,

変数 t の正弦関数 $\sin t$ の導関数を $\frac{d}{dt}\sin t$ と書き表し,

変数 u の対数関数 $\ln u = \log_e u$ の導関数を $\frac{d}{du}\ln u$ と書き表す.

正の整数 n に対して，冪関数 x^n の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数であり，各実数 x に対して

$$x \text{ における冪関数 } x^n \text{ の微分係数は } \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} \text{ ,}$$

よって $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

正の整数 n に対して，冪関数 x^n の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数であり，各実数 x に対して

$$x \text{ における冪関数 } x^n \text{ の微分係数は } \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} ,$$

よって $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

定理 正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

正の整数 n に対して、冪関数 x^n の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数であり、各実数 x に対して

$$x \text{ における冪関数 } x^n \text{ の微分係数は } \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} ,$$

よって $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

定理 正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

例えば次のようになる :

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 , \quad \frac{d}{dt}t^5 = 5t^4 , \quad \frac{d}{dy}y^2 = 2y^1 = 2y .$$

特に、 $x = x^1$ なので、

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^0 = 1 .$$

例 4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく： $f(x) = x^4$. 関数 f の導関数 f' を求めて、 -3 における f の微分係数を求める.

正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

例 4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく: $f(x) = x^4$. 関数 f の導関数 f' を求めて, -3 における f の微分係数を求める.

正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

関数 f の導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3 .$$

例 4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく : $f(x) = x^4$. 関数 f の導関数 f' を求めて, -3 における f の微分係数を求める.

正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

関数 f の導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3 .$$

-3 における f の微分係数は, -3 における導関数 f' の値 $f'(-3)$ なので,

$$f'(-3) = 4(-3)^3 = -108 .$$

終

問3.1.1 5 を指数とする冪関数 x^5 を g とおく : $g(x) = x^5$. 関数 g の導関数 g' を求めて, -2 における g の微分係数を求めよ.

正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

関数 g の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}x^5 = \quad .$$

-2 における g の微分係数は -2 における導関数 g' の値 $g'(-2)$ なので,

$$g'(-2) = \quad = \quad .$$

問3.1.1 5 を指数とする冪関数 x^5 を g とおく : $g(x) = x^5$. 関数 g の導関数 g' を求めて, -2 における g の微分係数を求めよ.

正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

関数 g の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4 .$$

-2 における g の微分係数は -2 における導関数 g' の値 $g'(-2)$ なので,

$$g'(-2) = 5(-2)^4 = 80 .$$

終

各実数 x に対して, x における定数関数の微分係数は 0 である. 従って, 変数 x に無関係な定数 k に対して, $f(x) = k$ である定数関数 f の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0 .$$

各実数 x に対して, x における定数関数の微分係数は 0 である. 従って, 変数 x に無関係な定数 k に対して, $f(x) = k$ である定数関数 f の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0 .$$

定理 変数 x に無関係な定数 k に対して, 定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = 0 .$$

各実数 x に対して、 x における定数関数の微分係数は 0 である。従って、変数 x に無関係な定数 k に対して、 $f(x) = k$ である定数関数 f の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0 .$$

定理 変数 x に無関係な定数 k に対して、定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = 0 .$$

この定理より、例えば次のようになる：

$$\frac{d}{dx}6 = 0 , \quad \frac{d}{dt}5^3 = 0 , \quad \frac{d}{dy}\ln 7 = 0 .$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数であり、各実数 x に対して

x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$,

よって $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数であり、各実数 x に対して

x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$,

よって $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数であり、各実数 x に対して

x における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$,

よって $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数であり，各実数 x に対して

x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$ ，

よって $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数であり，各実数 x に対して

x における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$ ，

よって $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.

定理 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の導関数は，それぞれ，

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x , \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x .$$

例 正弦関数 $\sin x$ を f とおく : $f(x) = \sin x$.

例 正弦関数 $\sin x$ を f とおく : $f(x) = \sin x$. 関数 f の導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

例 正弦関数 $\sin x$ を f とおく : $f(x) = \sin x$. 関数 f の導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

関数 f の $\frac{2\pi}{3}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} .$$

終

例 余弦関数 $\cos x$ を g とおく : $g(x) = \cos x$.

例 余弦関数 $\cos x$ を g とおく : $g(x) = \cos x$. 関数 g の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x .$$

例 余弦関数 $\cos x$ を g とおく : $g(x) = \cos x$. 関数 g の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x .$$

関数 g の $\frac{5\pi}{6}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} .$$

終

問3.1.2 正弦関数 $\sin x$ を g とおく. 関数 g の導関数を求めて, g の $\frac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めよ.

関数 g の導関数は $g'(x) =$. g の $\frac{5\pi}{3}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \quad = \quad = \quad = \quad .$$

問3.1.2 正弦関数 $\sin x$ を g とおく. 関数 g の導関数を求めて, g の $\frac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めよ.

関数 g の導関数は $g'(x) = \cos x$. g の $\frac{5\pi}{3}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = -\cos \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

終

$\frac{11\pi}{6}$

問3.1.3 余弦関数 $\cos x$ を f とおく. 関数 f の導関数を求めて, f の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めよ.

関数 f の導関数は $f'(x) =$. f の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \quad = \quad = \quad = \quad .$$

$\frac{11\pi}{6}$

問3.1.3 余弦関数 $\cos x$ を f とおく. 関数 f の導関数を求めて, f の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めよ.

関数 f の導関数は $f'(x) = -\sin x$. f の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

終

定数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 対数関数 $\log_a x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \log_a x$ の値は $\log_a x$ の微分係数であり, 正の各実数 x に対して, x における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x}$,

よって

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} .$$

定数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 対数関数 $\log_a x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \log_a x$ の値は $\log_a x$ の微分係数であり, 正の各実数 x に対して,

x における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x}$,
よって

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} .$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a} ,$$

定数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 対数関数 $\log_a x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \log_a x$ の値は $\log_a x$ の微分係数であり, 正の各実数 x に対して,

x における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x}$,

よって

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} .$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a} ,$$

よって

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a} .$$

定数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 対数関数 $\log_a x$ の導関数 $\frac{d}{dx} \log_a x$ の値は $\log_a x$ の微分係数であり, 正の各実数 x に対して,

x における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x}$,

よって

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} .$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a} ,$$

よって

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a} .$$

特に $a = e$ のときは, $\ln e = \log_e e = 1$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x} .$$

定理 定数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0) .$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0) .$$

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく : $f(x) = \log_3 x$ ($x > 0$) . 関数 f の導関数 f' を求めて, 5 における f の微分係数を求める.

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく : $f(x) = \log_3 x$ ($x > 0$) . 関数 f の導関数 f' を求めて, 5 における f の微分係数を求める.

関数 f の導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \log_3 x = \frac{\log_3 e}{x} = \frac{1}{x \ln 3} .$$

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく : $f(x) = \log_3 x$ ($x > 0$) . 関数 f の導関数 f' を求めて, 5 における f の微分係数を求める.

関数 f の導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \log_3 x = \frac{\log_3 e}{x} = \frac{1}{x \ln 3} .$$

5 における f の微分係数は, 5 における導関数 f' の値 $f'(5)$ なので,

$$f'(5) = \frac{\log_3 e}{5} = \frac{1}{5 \ln 3} .$$

終

問3.1.4 5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を g とおく : $g(x) = \log_5 x$ ($x > 0$) .

関数 g の導関数 g' を求めて, 7 における g の微分係数を求めよ.

関数 $g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\log_5 x = \quad = \quad .$$

7 における g の微分係数は, 7 における導関数 g' の値 $g'(7)$ なので,

$$g'(7) = \quad = \quad .$$

問3.1.4 5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を g とおく : $g(x) = \log_5 x$ ($x > 0$) .

関数 g の導関数 g' を求めて, 7 における g の微分係数を求めよ.

関数 $g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\log_5 x = \frac{\log_5 e}{x} = \frac{1}{x \ln 5} .$$

7 における g の微分係数は, 7 における導関数 g' の値 $g'(7)$ なので,

$$g'(7) = \frac{\log_5 e}{7} = \frac{1}{7 \ln 5} .$$

終

関数 f について、変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える。
 x の値の変化量を x の増分といい Δx と書き表す。

関数 f について、変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える。 x の値の変化量を x の増分といい Δx と書き表す。 x の増分 Δx に対して、 x が $x + \Delta x$ に変化すると、 $f(x)$ は $f(x + \Delta x)$ に変化する。このとき、 $f(x)$ の変化量は $f(x + \Delta x) - f(x)$ である。

関数 f について、変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える。 x の値の変化量を x の増分といい Δx と書き表す。 x の増分 Δx に対して、 x が $x + \Delta x$ に変化すると、 $f(x)$ は $f(x + \Delta x)$ に変化する。このとき、 $f(x)$ の変化量は $f(x + \Delta x) - f(x)$ である。これを、 x の増分 Δx に対する $f(x)$ の増分といい、 $\Delta f(x)$ と書き表す：

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) .$$

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ を x の増分 Δx で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} ;$$

これは関数 f の平均変化率である.

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ を x の増分 Δx で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\Delta x \rightarrow 0$ とする：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ を x の増分 Δx で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} ;$$

これは関数 f の平均変化率である. ここで $\Delta x \rightarrow 0$ とする:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

変数 Δx を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} .$$

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ を x の増分 Δx で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} ;$$

これは関数 f の平均変化率である。ここで $\Delta x \rightarrow 0$ とする：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

変数 Δx を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} .$$

これは、関数 f の微分係数なので、 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ である：

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) \\ &= \frac{d}{dx} f(x) , \end{aligned}$$

つまり $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y = f(x)$ のとき, $\Delta y = \Delta f(x)$ なので,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

これを $\frac{dy}{dx}$, y' などと書き表すこともある.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y = f(x)$ のとき, $\Delta y = \Delta f(x)$ なので,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

これを $\frac{dy}{dx}$, y' などと書き表すこともある. 結局, $y = f(x)$ のとき,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) .$$