3.2 関数の定数倍・和・差の微分法

次のことが基本になる：関数 φ について，変数 x の増分 $\mathit{\Delta} x$ に対する $\varphi(x)$ の増分 $\mathit{\Delta}\varphi(x)$ は

$$\mathit{\Delta}\varphi(x) = \varphi(x+\mathit{\Delta}x) - \varphi(x) \ ;$$

関数 $\varphi(x)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\mathit{\Delta}x \to 0} \frac{\mathit{\Delta}\varphi(x)}{\mathit{\Delta}x} \ .$$

関数 $f(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} f(x) \ .$$

関数 $f(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx} f(x) \ .$$

変数 x の増分 $\mathit{\Delta} x$ に対して,

$$f(x + \mathit{\Delta} x) - f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ .$$

関数 $f(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} f(x) \ .$$

変数 x の増分 $\varDelta x$ に対して,

$$f(x+\varDelta x) - f(x) = \varDelta f(x) \ .$$

x と無関係な定数 k に対して，関数 $k\,f(x)$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\{k\,f(x)\} = \lim_{\varDelta x \to 0} \dfrac{\varDelta\{k\,f(x)\}}{\varDelta x}$ を考える.

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta \varphi(x)}{\varDelta x}$$

$$f(x+\mathit{\Delta}x)-f(x) = \mathit{\Delta}f(x) \quad .$$

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x)\ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$kf(x)$ は $kf(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$k\,f(x)$ は $k\,f(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}$ は

$$\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\} = k\,f(x+\mathit{\Delta} x)-k\,f(x) \qquad .$$

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$kf(x)$ は $kf(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\mathit{\Delta}\{kf(x)\}$ は

$$\mathit{\Delta}\{kf(x)\} = kf(x+\mathit{\Delta} x)-kf(x) = k\{f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)\} = k\mathit{\Delta} f(x) \ .$$

$$f(x+\mathit{\Delta}x)-f(x) = \mathit{\Delta}f(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta}x$ に変化するとき，$kf(x)$ は $kf(x+\mathit{\Delta}x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\mathit{\Delta}\{kf(x)\}$ は

$$\mathit{\Delta}\{kf(x)\} = kf(x+\mathit{\Delta}x)-kf(x) = k\{f(x+\mathit{\Delta}x)-f(x)\} = k\mathit{\Delta}f(x) \ .$$

よって

$$\frac{\mathit{\Delta}\{kf(x)\}}{\mathit{\Delta}x} = \frac{k\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x} = k\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x} \ .$$

$$f(x+\varDelta x)-f(x) = \varDelta f(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$k\,f(x)$ は $k\,f(x+\varDelta x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\varDelta\{k\,f(x)\}$ は

$$\varDelta\{k\,f(x)\} = k\,f(x+\varDelta x)-k\,f(x) = k\{f(x+\varDelta x)-f(x)\} = k\,\varDelta f(x) \ .$$

よって

$$\frac{\varDelta\{k\,f(x)\}}{\varDelta x} = \frac{k\,\varDelta f(x)}{\varDelta x} = k\,\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x) \ .$

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$k\,f(x)$ は $k\,f(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}$ は

$$\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\} = k\,f(x+\mathit{\Delta} x)-k\,f(x) = k\{f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)\} = k\,\mathit{\Delta} f(x) \ .$$

よって

$$\frac{\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}}{\mathit{\Delta} x} = \frac{k\,\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = k\,\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ .$$

$\mathit{\Delta} x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ． k は定数なので，

$$\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\left\{k\,\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x}\right\} = k\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = k\,\frac{d}{dx}f(x) \ .$$

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$k\,f(x)$ は $k\,f(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}$ は

$$\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\} = k\,f(x+\mathit{\Delta} x)-k\,f(x) = k\{f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)\} = k\,\mathit{\Delta} f(x) \ .$$

よって

$$\frac{\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}}{\mathit{\Delta} x} = \frac{k\,\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = k\,\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ .$$

$\mathit{\Delta} x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ． k は定数なので，

$$\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\left\{k\,\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x}\right\} = k\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = k\,\frac{d}{dx}f(x) \ .$$

$\displaystyle\frac{d}{dx}\{k\,f(x)\} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{k\,f(x)\}}{\mathit{\Delta} x}$ なので

$$\frac{d}{dx}\{k\,f(x)\} = k\,\frac{d}{dx}f(x) \ .$$

定理　微分可能な関数 $f(x)$ 及び変数 x と無関係な定数 k に対して，関数 $k\,f(x)$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dx}\{k\,f(x)\} = k\,\frac{d}{dx}f(x)\ .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} f(x) \ , \qquad \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} g(x) \ .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} f(x) \ , \qquad \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} g(x) \ .$$

変数 x の増分 $\varDelta x$ に対して,

$$f(x+\varDelta x) - f(x) = \varDelta f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x) - g(x) = \varDelta g(x) \ .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) \ , \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) \ .$$

変数 x の増分 Δx に対して,

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \ , \qquad g(x+\Delta x) - g(x) = \Delta g(x) \ .$$

関数 $f(x)+g(x)$ の導関数 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x}$ を考える.

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ , \qquad g(x+\mathit{\Delta} x) - g(x) = \mathit{\Delta} g(x) \ .$$

$$f(x+\varDelta x)-f(x) = \varDelta f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x)-g(x) = \varDelta g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)$ に変化するので，

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x) \ , \qquad g(x+\mathit{\Delta} x)-g(x) = \mathit{\Delta} g(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\mathit{\Delta} x)+g(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化するので，その増分 $\mathit{\Delta}\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\mathit{\Delta}\{f(x)+g(x)\} = f(x+\mathit{\Delta} x)+g(x+\mathit{\Delta} x)-\{f(x)+g(x)\}$$

$$f(x+\varDelta x)-f(x) = \varDelta f(x)\ ,\qquad g(x+\varDelta x)-g(x) = \varDelta g(x)\ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\{f(x)+g(x)\} &= f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)-\{f(x)+g(x)\}\\ &= f(x+\varDelta x)-f(x)\ +g(x+\varDelta x)-g(x)\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x)-f(x) = \varDelta f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x)-g(x) = \varDelta g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\{f(x)+g(x)\} &= f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)-\{f(x)+g(x)\} \\ &= f(x+\varDelta x)-f(x)+g(x+\varDelta x)-g(x) \\ &= \varDelta f(x)+\varDelta g(x) \ .\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x)-f(x) = \varDelta f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x)-g(x) = \varDelta g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\{f(x)+g(x)\} &= f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)-\{f(x)+g(x)\} \\ &= f(x+\varDelta x)-f(x)+g(x+\varDelta x)-g(x) \\ &= \varDelta f(x)+\varDelta g(x) \ .\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)+\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}+\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .$$

$$f(x+\varDelta x)-f(x) = \varDelta f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x)-g(x) = \varDelta g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\{f(x)+g(x)\} &= f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)-\{f(x)+g(x)\} \\ &= f(x+\varDelta x)-f(x) + g(x+\varDelta x)-g(x) \\ &= \varDelta f(x)+\varDelta g(x) \ .\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)+\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}+\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$.

$$f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) = \mathit{\Delta} f(x)\ , \qquad g(x+\mathit{\Delta} x)-g(x) = \mathit{\Delta} g(x)\ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\mathit{\Delta} x)+g(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化するので，その増分 $\mathit{\Delta}\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\mathit{\Delta}\{f(x)+g(x)\} &= f(x+\mathit{\Delta} x)+g(x+\mathit{\Delta} x)-\{f(x)+g(x)\}\\ &= f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)+g(x+\mathit{\Delta} x)-g(x)\\ &= \mathit{\Delta} f(x)+\mathit{\Delta} g(x)\ .\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)+g(x)\}}{\mathit{\Delta} x} = \frac{\mathit{\Delta} f(x)+\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x}+\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x}\ .$$

$\mathit{\Delta} x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．よって

$$\begin{aligned}\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)+g(x)\}}{\mathit{\Delta} x} &= \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\left\{\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x}+\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x}\right\} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x}+\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x}\\ &= \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)\ .\end{aligned}$$

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta\{f(x) + g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x) \quad .$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \quad .$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x}$$ なので

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \quad .$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x}$ なので

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

同様に $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$ を計算すると

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x}$ なので

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

同様に $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$ を計算すると

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

定理　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $f(x)+g(x)$ と $f(x)-g(x)$ とは微分可能であり，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\pm g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \quad （複号同順）\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ と定める. f の導関数 f' を求める.

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ と定める． f の導関数 f' を求める．

$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin x\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sin x$$

定数 k に対して $\dfrac{d}{dx}\{k\,f(x)\} = k\,\dfrac{d}{dx}f(x)$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ と定める. f の導関数 f' を求める.

$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin x\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sin x = \frac{1}{2}\cos x$$
$$= \frac{\cos x}{2} .$$

終

$\boxed{問3.2.1}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{5\ln x}{3}$ と定める．g の導関数 g' を求めよ．

$\boxed{問3.2.1}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{5\ln x}{3}$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\frac{5\ln x}{3} = \frac{5}{3}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{5}{3}\frac{1}{x} \\
&= \frac{5}{3x} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = x^3 + \ln x$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = x^3 + \ln x$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$, $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + \ln x) = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\ln x \qquad .$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y = x^3 + \ln x$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ ， $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + \ln x) = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\ln x = 3x^2 + \frac{1}{x} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問3.2.2}$ 変数 x の関数 $y = x^2 + \cos x$ を微分せよ.

問3.2.2 変数 x の関数 $y = x^2 + \cos x$ を微分せよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + \cos x) = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}\cos x = 2x - \sin x \ .$$

終

$\boxed{例}$ 変数の u の関数 $3u^2-5u+7$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数の u の関数 $3u^2 - 5u + 7$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(3u^2 - 5u + 7) &= \frac{d}{du}(3u^2) - \frac{d}{du}(5u) + \frac{d}{du}7 \\ &= 3\,\frac{d}{du}u^2 - 5\,\frac{d}{du}u + 0 = 3 \cdot 2u - 5 \cdot 1 \\ &= 6u - 5 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.2.3}$ 変数 y の関数 $2y^3 - 7y + 4$ を微分せよ.

$\boxed{問 3.2.3}$ 変数 y の関数 $2y^3 - 7y + 4$ を微分せよ．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(2y^3 - 7y + 4) &= \frac{d}{dy}(2y^3) - \frac{d}{dy}(7y) + \frac{d}{dy}4 \\ &= 2\frac{d}{dy}y^3 - 7\frac{d}{dy}y + \frac{d}{dy}4 = 2 \cdot 3y^2 - 7 \\ &= 6y^2 - 7\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{x^3 + 5\cos x}{4}$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{x^3 + 5\cos x}{4}$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求める.

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3 + 5\cos x}{4}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{x^3 + 5\cos x}{4}$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求める.

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3 + 5\cos x}{4} = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}(x^3 + 5\cos x) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx}x^3 + 5\frac{d}{dx}\cos x\right) = \frac{1}{4}\{3x^2 + 5(-\sin x)\} \\
&= \frac{3x^2 - 5\sin x}{4}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.2.4}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{4\sin x - 3x^2}{5}$ と定める.
関数 φ の導関数 φ' を求めよ.

$\boxed{\text{問}3.2.4}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{4\sin x - 3x^2}{5}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求めよ.

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{4\sin x - 3x^2}{5} = \frac{1}{5}\frac{d}{dx}(4\sin x - 3x^2) \\
&= \frac{1}{5}\left(4\frac{d}{dx}\sin x - 3\frac{d}{dx}x^2\right) = \frac{1}{5}(4\cos x - 3\cdot 2x) \\
&= \frac{4\cos x - 6x}{5} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$