3.4 いくつかの関数の導関数

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する.

正接関数 $\tan x$ （ $\cos x \neq 0$ ）を微分する． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として，微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\dfrac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad （\ g(x) \neq 0\ ）$$

であること，及び微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ と $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ とを用いる．

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として，微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\dfrac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad (\ g(x) \neq 0\ )$$

であること，及び微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ と $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ とを用いる．

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\dfrac{d}{dx}\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

正接関数 $\tan x$ （ $\cos x \neq 0$ ）を微分する． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として，微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\dfrac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad (\ g(x) \neq 0\ )$$

であること，及び微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ と $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ とを用いる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\dfrac{d}{dx}\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x\,\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

正接関数 $\tan x$ （ $\cos x \neq 0$ ）を微分する． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として，微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\dfrac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad (\ g(x) \neq 0\ )$$

であること，及び微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ と $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ とを用いる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\dfrac{d}{dx}\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\ .
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad .$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ と定義されたので,

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \ .$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad .$$

正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ と定義されたので,

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad .$$

更に, $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \quad .$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ と定義されたので，

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \ .$$

更に，$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \ .$$

定理　正接関数 $\tan x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (\ \cos x \neq 0\ ) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{\tan x}{x^2} = \frac{\frac{d}{dx}\tan x \cdot x^2 - \tan x \cdot \frac{d}{dx}x^2}{(x^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x)\,\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

例 区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{\tan x}{x^2} = \frac{\dfrac{d}{dx}\tan x \cdot x^2 - \tan x \cdot \dfrac{d}{dx}x^2}{(x^2)^2} \\
&= \frac{\sec^2 x \cdot x^2 - \tan x \cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{x\sec^2 x - 2\tan x}{x^3} \ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問3.4.1}$ 区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \tan x$ と定める. f の導関数 f' を求めよ.

$\boxed{問3.4.1}$ 区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \tan x$ と定める. f の導関数 f' を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 \tan x) = \frac{d}{dx}x^3 \cdot \tan x + x^3 \frac{d}{dx} \tan x \\ &= 3x^2 \tan x + x^3 \sec^2 x \\ &= x^2 (3 \tan x + x \sec^2 x) \ . \end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問3.4.2}$ 変数 t の関数 $x = \dfrac{\tan t}{t^3}$ を微分せよ.

$\boxed{問3.4.2}$ 変数 t の関数 $x = \dfrac{\tan t}{t^3}$ を微分せよ.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\tan t}{t^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}\tan t \cdot t^3 - \tan t\,\dfrac{d}{dt}t^3}{(t^3)^2}$$
$$= \frac{\sec^2 t \cdot t^3 - \tan t \cdot 3t^2}{t^6}$$
$$= \frac{t\sec^2 t - 3\tan t}{t^4} \ .$$

$\boxed{終}$

例 冪関数 x^{-3} ($x \neq 0$) を微分する： $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ なので，

$$\frac{d}{dx}x^{-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^3} = -\frac{\frac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -3\frac{1}{x^4} = -3x^{-4} \ .$$

終

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

整数 n について冪関数 x^n （ $x \neq 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ を考える.

整数 n について冪関数 x^n （ $x \neq 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ を考える.

$n \geq 1$ のとき， $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

整数 n について冪関数 x^n（ $x \neq 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ を考える.

$n \geq 1$ のとき, $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$n = 0$ のとき, $\dfrac{d}{dx}x^n = \dfrac{d}{dx}x^0 = \dfrac{d}{dx}1 = 0$, また $nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0$,

従って $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

整数 n について冪関数 x^n（$x \neq 0$）の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える.

$n \geq 1$ のとき，$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$n = 0$ のとき，$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0$ ，また $nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0$ ，

従って $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$n \leq -1$ のとき，正の整数 m に対して $n = -m$ とする；$\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$ ，

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = -\frac{\frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

整数 n について冪関数 x^n （ $x \neq 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ を考える.

$n \geq 1$ のとき， $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ．

$n = 0$ のとき， $\dfrac{d}{dx}x^n = \dfrac{d}{dx}x^0 = \dfrac{d}{dx}1 = 0$ ，また $nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0$ ，

従って $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ．

$n \leq -1$ のとき，正の整数 m に対して $n = -m$ とする； $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$ ，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = -\frac{\dfrac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} \\
= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} \\
= nx^{n-1} \ .
\end{aligned}$$

整数 n について冪関数 x^n （ $x \neq 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ を考える.

$n \geq 1$ のとき， $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$n = 0$ のとき， $\dfrac{d}{dx}x^n = \dfrac{d}{dx}x^0 = \dfrac{d}{dx}1 = 0$ ， また $nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0$ ，
従って $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$n \leq -1$ のとき，正の整数 m に対して $n = -m$ とする； $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$ ，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = -\frac{\dfrac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} \\
= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} \\
= nx^{n-1} \ .
\end{aligned}$$

$n \geq 1$ のときも $n = 0$ のときも $n \leq -1$ のときも $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

定理　整数 n を指数とする冪関数 x^n （ $x \neq 0$ ）の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

整数 n に対して $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$).

$\boxed{例}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

整数 n に対して $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$).

$$\psi(x)=\frac{2}{3x^5}=\frac{2}{3}x^{-5}$$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x^5}$ と定める．ψ の導関数 ψ' を求める．

整数 n に対して $\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ （ $x\neq 0$ ）．

$\psi(x)=\dfrac{2}{3x^5}=\dfrac{2}{3}x^{-5}$ なので，

$$
\begin{aligned}
\psi'(x)&=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\frac{2}{3x^5}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{-5}\right)=\frac{2}{3}\,\frac{d}{dx}x^{-5}=\frac{2}{3}\,(-5x^{-6})\\
&=-\frac{10}{3x^6}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問} 3.4.3}$ 区間 $(0, \infty)$ を定義域とするの関数 g を $g(x) = \dfrac{3}{2x^4}$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

問3.4.3 区間 $(0,\infty)$ を定義域とするの関数 g を $g(x)=\dfrac{3}{2x^4}$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\frac{3}{2x^4}=\frac{3}{2}\frac{d}{dx}x^{-4}=\frac{3}{2}\cdot(-4)x^{-5}=-\frac{6}{x^5}\ .$$

終