

3.5 合成関数の微分法

次のことが基本になる：変数 x の関数 $y = \psi(x)$ について， x の増分 Δx に対する y の増分 Δy は

$$\Delta y = \Delta\psi(x) = \psi(x + \Delta x) - \psi(x) ;$$

関数 y の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとする. φ と f との合成関数がある.

微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとする. φ と f との合成関数がある. 変数 x に対して, 変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき, 変数 y を $y = f(t)$ とおく.

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。 $\varphi(x)$ は微分可能なので連続である。

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。 $\varphi(x)$ は微分可能なので連続である。 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\varphi(x + \Delta x) \rightarrow \varphi(x)$ なので $\Delta t = \Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \rightarrow 0$.

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。 $\varphi(x)$ は微分可能なので連続である。 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\varphi(x + \Delta x) \rightarrow \varphi(x)$ なので $\Delta t = \Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dt}{dx} .$$

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。 $\varphi(x)$ は微分可能なので連続である。 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\varphi(x + \Delta x) \rightarrow \varphi(x)$ なので $\Delta t = \Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dt}{dx} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ の極限值があるので、 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ と考える。

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。 $\varphi(x)$ は微分可能なので連続である。 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\varphi(x + \Delta x) \rightarrow \varphi(x)$ なので $\Delta t = \Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dt}{dx} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ の極限值があるので、 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ と考える。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとする。 φ と f との合成関数がある。 変数 x に対して、変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき、変数 y を $y = f(t)$ とおく。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく。 Δt は 0 にならないとする。 合成関数 $y = f(t) = f(\varphi(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える。 $\varphi(x)$ は微分可能なので連続である。 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\varphi(x + \Delta x) \rightarrow \varphi(x)$ なので $\Delta t = \Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dt}{dx} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ の極限值があるので、 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ と考える。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

つまり

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$y = f(t)$ なので, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(t)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$, よって

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$y = f(t)$ なので, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(t)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$, よって

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

Δt が 0 にならないことを前提にしたが, この前提がなくても上の等式は成り立つ.

定理 微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, 変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

定理 微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, 変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと,

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

定理 微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとき、変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと、

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

例えば微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できるのは、 $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が \sin の中身と一致するときである。

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x ,$$

一致

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t .$$

一致

定理 微分可能な関数 φ と f について、 φ の値域が f の定義域に含まれるとき、変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと、

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

例えば微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できるのは、 $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が \sin の中身と一致するときである。

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x ,$$

一致

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t .$$

一致

一致しないとき上述の定理を用いる：変数 x の関数 $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき、

$$\frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

定理 微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, 変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと,

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

定理 微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, 変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと,

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} .$$

変数 x の関数 $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき,

$$\text{整数 } n \text{ に対して } \frac{d}{dx} t^n = \frac{d}{dt} t^n \cdot \frac{dt}{dx} = n t^{n-1} \cdot \frac{dt}{dx} ,$$

$$\frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} ,$$

$$\frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} ,$$

$$\frac{d}{dx} \tan t = \frac{d}{dt} \tan t \cdot \frac{dt}{dx} = \sec^2 t \cdot \frac{dt}{dx} ,$$

$$\frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x + 2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x + 2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x + 2$ とおく. $f(x) = \sin(3x + 2) = \sin t$ を微分する.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x + 2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x + 2$ とおく. $f(x) = \sin(3x + 2) = \sin t$ を微分する. 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できるのは, $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が \sin の中身と一致するときである.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x + 2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する. 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できるのは, $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が \sin の中身と一致するときである.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dt} \sin t = \cos t.$$

一致 一致

なので, 変数 x の関数 $f(x) = \sin t$ の導関数

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin t$$

を計算するには, このままでは微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できない.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x + 2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x + 2$ とおく. $f(x) = \sin(3x + 2) = \sin t$ を微分する.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x+2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する. 公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおく:

$$\frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x + 2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x + 2$ とおく. $f(x) = \sin(3x + 2) = \sin t$ を微分する. 公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおく:

$$\frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = 3x + 2$ なので, $\cos t = \cos(3x + 2)$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 2) = 3$, よって,

$$\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos(3x + 2) \cdot 3 = 3 \cos(3x + 2) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x + 2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する. 公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおく:

$$\frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = 3x + 2$ なので, $\cos t = \cos(3x + 2)$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(3x + 2) = 3$, よって,

$$\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos(3x + 2) \cdot 3 = 3 \cos(3x + 2) .$$

故に

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin t = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = 3 \cos(3x + 2) .$$

終

例 変数 x の関数 $y = \cos \frac{4x + 5}{3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

例 変数 x の関数 $y = \cos \frac{4x+5}{3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \frac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos \frac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

例 変数 x の関数 $y = \cos \frac{4x+5}{3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \frac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos \frac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 変数 x の関数 $y = \cos \frac{4x+5}{3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \frac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos \frac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = \frac{4x+5}{3}$ なので, $\sin t = \sin \frac{4x+5}{3}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{4x+5}{3} = \frac{4}{3}$, よって,

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin \frac{4x+5}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \sin \frac{4x+5}{3} .$$

例 変数 x の関数 $y = \cos \frac{4x+5}{3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \frac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos \frac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = \frac{4x+5}{3}$ なので, $\sin t = \sin \frac{4x+5}{3}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{4x+5}{3} = \frac{4}{3}$, よって,

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin \frac{4x+5}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \sin \frac{4x+5}{3} .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos t = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{4}{3} \sin \frac{4x+5}{3} .$$

終

問3.5.1 $\frac{7x-5}{3}$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \tan \frac{7x-5}{3}$ と定める. f の導関数 f' を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく. $f(x) = \tan \frac{7x-5}{3} =$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \quad = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \quad \cdot \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

問3.5.1 $\frac{7x-5}{3}$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \tan \frac{7x-5}{3}$ と定める. f の導関数 f' を求めよ.

変数 t を $t = \frac{7x-5}{3}$ とおく. $f(x) = \tan \frac{7x-5}{3} = \tan t$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \tan t = \frac{d}{dt} \tan t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \sec^2 t \cdot \frac{d}{dx} \frac{7x-5}{3} = \sec^2 \frac{7x-5}{3} \cdot \frac{7}{3} \\ &= \frac{7}{3} \sec^2 \frac{7x-5}{3} . \end{aligned}$$

終

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める. 各実数 x について, $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ なので, $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ の値がある.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく. $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく. $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} .$$
$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく. $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\ln t = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので, $\frac{1}{t} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$,

よって

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく. $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\ln t = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので, $\frac{1}{t} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$,

よって

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} .$$

故に

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\ln t = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} .$$

終

問3.5.2 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく. $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) =$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} (\quad)$$

問3.5.2 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

変数 t を $t = 3x^2 - 7x + 5$ とおく. $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) = \ln t$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 - 7x + 5) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 7x + 5} \cdot (6x - 7) \\ &= \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 5} .\end{aligned}$$

終

例 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

例 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

例 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4 = \frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4 = \frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = \cos x$ なので, $t^3 = (\cos x)^3 = \cos^3 x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cos^3 x .$$

例 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4 = \frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = \cos x$ なので, $t^3 = (\cos x)^3 = \cos^3 x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cos^3 x .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4 = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = -4 \sin x \cos^3 x .$$

終

問3.5.3 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ.

変数 t を $t = \sin x$ とおく. $\psi(x) = (\sin x)^3 = t^3$ なので,

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}t^3 = \frac{d}{dt}t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \frac{d}{dx}\sin x$$

問3.5.3 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ.

変数 t を $t = \sin x$ とおく. $\psi(x) = (\sin x)^3 = t^3$ なので,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}t^3 = \frac{d}{dt}t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \frac{d}{dx}\sin x = 3(\sin x)^2 \cos x \\ &= 3\sin^2 x \cos x .\end{aligned}$$

終

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は、 f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ であった.

例 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos \frac{5x + 8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos \frac{5x + 8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

変数 t を $t = \frac{5x + 8\pi}{3}$ とおく. $\psi(x) = \cos \frac{5x + 8\pi}{3} = \cos t$ なので,

例 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos \frac{5x + 8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

変数 t を $t = \frac{5x + 8\pi}{3}$ とおく. $\psi(x) = \cos \frac{5x + 8\pi}{3} = \cos t$ なので,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= -\sin t \cdot \frac{d}{dx} \frac{5x + 8\pi}{3} = -\sin \frac{5x + 8\pi}{3} \cdot \frac{5}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \sin \frac{5x + 8\pi}{3} .\end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos \frac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

変数 t を $t = \frac{5x+8\pi}{3}$ とおく. $\psi(x) = \cos \frac{5x+8\pi}{3} = \cos t$ なので,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= -\sin t \cdot \frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3} = -\sin \frac{5x+8\pi}{3} \cdot \frac{5}{3} \\ &= -\frac{5}{3}\sin \frac{5x+8\pi}{3} .\end{aligned}$$

π における $\psi(x)$ の微分係数は

$$\begin{aligned}\psi'(\pi) &= -\frac{5}{3}\sin \frac{5\pi+8\pi}{3} = -\frac{5}{3}\sin \frac{13\pi}{3} \\ &= -\frac{5}{3}\sin \left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi \right) = -\frac{5}{3}\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{6} .\end{aligned}$$

問3.5.4 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin \frac{7x + 8\pi}{3}$ の $\frac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \sin \frac{7x + 8\pi}{3} =$$

$\frac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

問3.5.4 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin \frac{7x + 8\pi}{3}$ の $\frac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t = \frac{7x + 8\pi}{3}$ とおく.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \sin \frac{7x + 8\pi}{3} = \frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{d}{dx} \frac{7x + 8\pi}{3} \\ &= \frac{7}{3} \cos \frac{7x + 8\pi}{3} .\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

問3.5.4 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin \frac{7x + 8\pi}{3}$ の $\frac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t = \frac{7x + 8\pi}{3}$ とおく.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \sin \frac{7x + 8\pi}{3} = \frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{d}{dx} \frac{7x + 8\pi}{3} \\ &= \frac{7}{3} \cos \frac{7x + 8\pi}{3} .\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\begin{aligned}\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{7}{3} \cos \frac{7 \cdot \frac{\pi}{2} + 8\pi}{3} = \frac{7}{3} \cos \frac{23\pi}{6} = \frac{7}{3} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{3} \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{6} .\end{aligned}$$

終