3.6 いくつかの関数の導関数

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}a^x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める．

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める． $y = a^x$ の自然対数を考える：

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a \ .$$

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}a^x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=a^x$ の自然対数を考える：

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a\ .$$

これを x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a)\ . \qquad (*)$$

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}a^x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=a^x$ の自然対数を考える：

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a \ .$$

これを x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a) \ . \qquad (*)$$

この等式 $(*)$ の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ .$$

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}a^x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=a^x$ の自然対数を考える：

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a \ .$$

これを x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a) \ . \tag{$*$}$$

この等式 ($*$) の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ .$$

$\ln a$ は定数なので，等式 ($*$) の右辺は

$$\frac{d}{dx}(x\ln a) = \ln a\cdot\frac{d}{dx}x = \ln a\cdot 1 = \ln a \ .$$

定数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ とする．変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}a^x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=a^x$ の自然対数を考える：

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a \ .$$

これを x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x \ln a) \ . \qquad (*)$$

この等式 $(*)$ の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ .$$

$\ln a$ は定数なので，等式 $(*)$ の右辺は

$$\frac{d}{dx}(x \ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx}x = \ln a \cdot 1 = \ln a \ .$$

よって $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \ln a$ なので， $\dfrac{dy}{dx} = y \ln a$ ； $y=a^x$ なので， $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ ．

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \ .$$

特に，$a = e$ のとき，$\ln a = \ln e = \log_e e = 1$ なので，

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x \ .$$

定理　1 以外の正の実数 a を底とする指数関数 a^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \ .$$

特に，自然対数の底 e に対して，指数関数 e^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\frac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$\dfrac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$ なので，

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}(3^x \sin x) = \frac{d}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx}\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$\dfrac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$ なので,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}(3^x \sin x) = \frac{d}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx}\sin x \\
&= 3^x \ln 3 \cdot \sin x + 3^x \cos x \\
&= 3^x (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x) \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}3.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 2^x \cos x$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

$$\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$$ なので

$\boxed{問 3.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 2^x \cos x$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

$\dfrac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$ なので

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}(2^x \cos x) = \frac{d}{dx}2^x \cdot \cos x + 2^x \frac{d}{dx}\cos x \\ &= 2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x(-\sin x) \\ &= 2^x(\ln 2 \cdot \cos x - \sin x) \ .\end{aligned}$$

例 変数 x の関数 $y=\dfrac{x^3}{5^x}$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{x^3}{5^x}$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}5^x = 5^x \ln 5$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx}x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数 x の関数 $y = \dfrac{x^3}{5^x}$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}5^x = 5^x \ln 5$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{5^x} = \frac{\dfrac{d}{dx}x^3 \cdot 5^x - x^3 \dfrac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2} = \frac{3x^2\, 5^x - x^3\, 5^x \ln 5}{(5^x)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - x^3 \ln 5}{5^x} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}3.6.2}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ.

$\boxed{\text{問}3.6.2}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{3^x} = \frac{\frac{d}{dx}\sin x \cdot 3^x - \sin x \cdot \frac{d}{dt}3^x}{(3^x)^2} = \frac{\cos x \cdot 3^x - \sin x \cdot 3^x \ln 3}{(3^x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \ln 3 \cdot \sin x}{3^x} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する.

変数 t を $t = 2x - 3$ とおく. $y = e^{2x-3} = e^t$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 変数 x の関数 $y=e^{2x-3}$ を微分する.

変数 t を $t=2x-3$ とおく. $y=e^{2x-3}=e^{t}$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}e^{t} = \frac{d}{dt}e^{t}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{t}\cdot\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2\\ &= 2e^{2x-3}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 3.6.3}$ 変数 u の関数 $v = e^{5-3u}$ を微分せよ.

$\boxed{問3.6.3}$ 変数 u の関数 $v = e^{5-3u}$ を微分せよ.

変数 t を $t = 5 - 3u$ とおく.

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}e^{5-3u} = \frac{d}{du}e^{t} = \frac{d}{dt}e^{t} \cdot \frac{dt}{du} = e^{t} \cdot \frac{d}{du}(5-3u) = e^{5-3u} \cdot (-3)$$

$$= -3e^{5-3u} \quad .$$

$\boxed{終}$

定数 p に対して，変数 x の冪関数 $y = x^p$ （$x > 0$）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^p = \dfrac{dy}{dx}$ を求める．

定数 p に対して，変数 x の冪関数 $y = x^p$ （ $x > 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^p = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y = x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x \ .$$

定数 p に対して，変数 x の冪関数 $y = x^p$ （ $x > 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^p = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y = x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x \ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p \ln x) \ . \tag{$*$}$$

　定数 p に対して，変数 x の冪関数 $y=x^p$ （ $x>0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^p=\dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y=x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y \;=\; \ln x^p \;=\; p\ln x \;\;.$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y \;=\; \frac{d}{dx}(p\ln x) \;\;. \qquad (*)$$

この等式 $(*)$ の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y \;=\; \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \;\;.$$

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

定数 p に対して，変数 x の冪関数 $y = x^p$ （ $x > 0$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^p = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y = x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x \ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p \ln x) \ . \tag{$*$}$$

この等式 $(*)$ の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ .$$

p は定数なので，等式 $(*)$ の右辺は

$$\frac{d}{dx}(p \ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x} \ .$$

定数 p に対して，変数 x の冪関数 $y = x^p$ （ $x > 0$ ） の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^p = \dfrac{dy}{dx}$ を求める． $y = x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x \ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p \ln x) \ . \qquad (*)$$

この等式 $(*)$ の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \ .$$

p は定数なので，等式 $(*)$ の右辺は

$$\frac{d}{dx}(p \ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x} \ .$$

よって $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{1}{x}$ なので $\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{y}{x}$ ， $y = x^p$ なので $\dfrac{d}{dx}x^p = p\dfrac{x^p}{x} = px^{p-1}$ ．

定理　定数 p を指数とする冪関数 x^p （ $x > 0$ ） の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} \ .$$

冪関数の微分公式を並べてみる.

定数 n が正の整数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$;

定数 n が整数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$) ;

定数 p が実数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ ($x > 0$) .

冪関数の指数の範囲が広がると独立変数 x の値の範囲は狭まる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt[3]{x^2}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\sqrt[3]{x}^{\,2}$ を微分する.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}^{\,2} = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} .$$

終

定数 p に対して $\dfrac{d}{dx}x^{p} = px^{p-1}$

$\boxed{\text{問}3.6.4}$ 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x}^{\,3}$ を微分せよ.

問3.6.4 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x}^{\,3}$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{x}^{\,3} = \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x}^{\,2}} \quad .$$

終

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{5}{3x}}$ $(\ x > 0\ )$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.

$\sqrt{\dfrac{5}{3x}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}$ なので,

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{5}{3x}}$ （ $x>0$ ）を微分する.

$$\sqrt{\frac{5}{3x}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}$$ なので,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{5}{3x}}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

定数 p に対して $\dfrac{d}{dx}x^p=px^{p-1}$

例 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{5}{3x}}$ （ $x>0$ ）を微分する.

$$\sqrt{\frac{5}{3x}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}$$ なので,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{5}{3x}}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{5}{12x}}\ .$$

終

$\boxed{問3.6.5}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x}}$ ($x > 0$) を微分せよ.

問3.6.5 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x}}$ （ $x > 0$ ）を微分せよ.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{5x}} = \sqrt{\frac{6}{5}}\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{3}{10x}} \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

例 変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する.

変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する.

変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d}{dy}f(t)=\frac{d}{dt}f(t)\cdot\frac{dt}{dy}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する.

変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(y^2-3y+5)=$$

定数 p に対して $\dfrac{d}{dx}x^p=px^{p-1}$

例 変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する.

変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(y^2-3y+5)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(2y-3)$$

$$=\frac{2y-3}{2\sqrt{y^2-3y+5}}\ .$$

終

$\boxed{\text{問}3.6.6}$ 変数 y の関数 $z=\sqrt{3y^2-5y+4}$ を微分せよ.

$\boxed{\text{問}3.6.6}$ 変数 y の関数 $z=\sqrt{3y^2-5y+4}$ を微分せよ.

変数 t を $t=3y^2-5y+4$ とおく. $z=\sqrt{3y^2-5y+4}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(3y^2-5y+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(6y-5)$$

$$=\frac{6y-5}{2\sqrt{3y^2-5y+4}}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める. 7 における f の微分係数を求める.

$\boxed{例}$ 区間 $\left[-\dfrac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める．7 における f の微分係数を求める．

変数 t を $t=5x+1$ とおく． $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}=\sqrt{t}^{\,3}=t^{\frac{3}{2}}$ なので，

$\boxed{例}$ 区間 $\left[-\dfrac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める．7 における f の微分係数を求める．

変数 t を $t = 5x+1$ とおく． $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3} = \sqrt{t}^{\,3} = t^{\frac{3}{2}}$ なので， f の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める．7 における f の微分係数を求める．

変数 t を $t=5x+1$ とおく． $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}=\sqrt{t}^{\,3}=t^{\frac{3}{2}}$ なので，f の導関数 f' は

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(5x+1)$$

定数 p に対して $\dfrac{d}{dx}x^p=px^{p-1}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める．7 における f の微分係数を求める．

変数 t を $t = 5x+1$ とおく． $f(x) = \sqrt{5x+1}^{\,3} = \sqrt{t}^{\,3} = t^{\frac{3}{2}}$ なので，f の導関数 f' は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(5x+1) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot 5 \\ &= \frac{15}{2}\sqrt{5x+1}\ . \end{aligned}$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める. 7 における f の微分係数を求める.

変数 t を $t=5x+1$ とおく. $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}=\sqrt{t}^{\,3}=t^{\frac{3}{2}}$ なので, f の導関数 f' は

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(5x+1)=\frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot 5$$

$$=\frac{15}{2}\sqrt{5x+1}\ .$$

7 における f の微分係数は

$$f'(7)=\frac{15}{2}\sqrt{5\cdot 7+1}=\frac{15}{2}\sqrt{36}=\frac{15}{2}\cdot 6=45\ .$$

終

$\boxed{問 3.6.7}$ 区間 $\left[\dfrac{5}{6}, \infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^{\,3}$ と定める. 9 における g の微分係数を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{6x-5}^{\,3} =$$

9 における g の微分係数は

$$g'(9) = \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}3.6.7}$ 区間 $\left[\frac{5}{6},\infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sqrt{6x-5}^{\,3}$ と定める. 9 における g の微分係数を求めよ.

変数 t を $t=6x-5$ とおく.

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{6x-5}^{\,3}=\frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(6x-5)=\frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot 6$$

$$=9\sqrt{6x-5}\ .$$

9 における g の微分係数は

$$g'(9)=\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}3.6.7}$ 区間 $\left[\frac{5}{6}, \infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^{\,3}$ と定める. 9 における g の微分係数を求めよ.

変数 t を $t = 6x-5$ とおく.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{6x-5}^{\,3} = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(6x-5) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot 6$$
$$= 9\sqrt{6x-5} \ .$$

9 における g の微分係数は

$$g'(9) = 9\sqrt{6\cdot 9-5} = 9\sqrt{49} = 63 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \ .$$

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \ .$$

変数 x について $x < 0$ のとき, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y > 0$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\,\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \ .$$

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \ .$$

変数 x について $x < 0$ のとき, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y > 0$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \ .$$

故に, $x > 0$ のときも $x < 0$ のときも $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$.

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} .$$

変数 x について $x < 0$ のとき, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y > 0$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} .$$

故に, $x > 0$ のときも $x < 0$ のときも $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$.

定理 関数 $\ln|x|$ ($x \neq 0$) の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $z = \ln|y^3+2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3+2$ とおく. $z = \ln|y^3+2| = \ln|t|$ なので,

例 変数 y の関数 $z = \ln|y^3+2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3+2$ とおく. $z = \ln|y^3+2| = \ln|t|$ なので,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}\ln|t| = \frac{d}{dt}\ln|t| \cdot \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d}{dy}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dy}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $z = \ln|y^3+2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3+2$ とおく. $z = \ln|y^3+2| = \ln|t|$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy}\ln|t| = \frac{d}{dt}\ln|t| \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dy}(y^3+2) = \frac{1}{y^3+2}3y^2 \\ &= \frac{3y^2}{y^3+2}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.6.8}$ 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ.

$\boxed{\text{問}3.6.8}$ 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ.

変数 t を $t = \cos x$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\ln|\cos x| = \frac{d}{dx}\ln|t| = \frac{d}{dt}\ln|t| \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dx}\cos x = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \\
&= -\tan x \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$