3.6 いくつかの関数の導関数

定数 a について a>0 かつ $a\neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x=\frac{dy}{dx}$ を求める.

定数
$$a$$
 について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x=\frac{dy}{dx}$ を求める. $y=a^x$ の自然対数を考える:
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a \ .$$

定数
$$a$$
 について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x=\frac{dy}{dx}$ を求める. $y=a^x$ の自然対数を考える:
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a \ .$$

これを
$$x$$
 で微分する:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a) \ . \tag{*}$$

$$\frac{dx}{dx} \ln y = \frac{dx}{dx} (x \ln a) . \tag{}$$

定数 a について a>0 かつ $a\neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数を考える: $\ln y = \ln a^x = x \ln a$. **これを** *x* で微分する: $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a)$. (*)

この等式
$$(*)$$
 の左辺は
$$\frac{d}{d} \ln y = \frac{d}{d} \ln y \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{d} \frac{dy}{dt}$$

 $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} .$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} .$$

$$\frac{d}{dt}f(y) = \frac{d}{dt}f(y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

 $\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{d}{dx}$$

定数 a について a>0 かつ $a\neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x=\frac{dy}{dx}$ を求める. $y=a^x$ の自然対数を考える: $\ln y = \ln a^x = x \ln a$. **これを** *x* で微分する: $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a)$. (*)

 $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$.

$$dx^{mg} = dy^{mg} = dx^{mg} = dx^{mg} = y dx^{mg}$$
 a は定数なので,等式($*$)の右辺は

 $\ln a$ は定数なので、等式 (*) の右辺は

定数なので、等式(*)の石辺は
$$d$$
 、 、 、 、 d 、 、 、 、 、

$$\frac{d}{dx}(x\ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx}x = \ln a \cdot 1 = \ln a$$
.

$$\frac{1}{dx}(x \ln a) = \ln a \cdot \frac{1}{dx} = \ln a \cdot 1 = \ln a .$$

定数 a について a>0 かつ $a\neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y=a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x=\frac{dy}{dx}$ を求める. $y=a^x$ の自然対数を考える: $\ln y = \ln a^x = x \ln a$. **これを** *x* で微分する: $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a)$. (*)この等式 (*) の左辺は

 $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$.

 $\ln a$ は定数なので、等式 (*) の右辺は

 $\frac{d}{dx}(x\ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx}x = \ln a \cdot 1 = \ln a .$

よって $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a$ なので、 $\frac{dy}{dx} = y \ln a$; $y = a^x$ なので、 $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$.

$$rac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$$
 .
こ, $a=e$ のとき, $\ln a=\ln e=\log_e e=1$ なので,

特に、
$$a=e$$
 のとき、 $\ln a=\ln e=\log_e e=1$ なので、 $rac{d}{dx}e^x=e^x\ln e=e^x\cdot 1=e^x$.

定理
$$1$$
 以外の正の実数 a を底とする指数関数 a^x の導関数は d x x x

 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

特に、自然対数の底 e に対して、指数関数 e^x の導関数は

$$\frac{a}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

 $oxed{ | m |}$ 実数全体を定義域とする関数 arphi を $arphi(x)=3^x\sin x$ と定める. 関数 arphi の 導関数 φ' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=3^x\sin x$ と定める. 関数 φ の 導関数 φ' を求める. $\frac{d}{dx}3^x=3^x\ln 3$ なので,

 $|\emptyset|$ 実数全体を定義域とする関数 arphi を $arphi(x)=3^x\sin x$ と定める. 関数 arphi の 導関数 φ' を求める. $\frac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$ なので、

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}(3^x \sin x) = \frac{d}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx}\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$

例 実数全体を定義域とする関数
$$\varphi$$
 を $\varphi(x)=3^x\sin x$ と定める. 関数 φ の 導関数 φ' を求める.
$$\frac{d}{dx}3^x=3^x\ln 3$$
 なので,

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}(3^x \sin x) = \frac{d}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx}\sin x$$

$$\varphi'(x) = \frac{\alpha}{dx}\varphi(x) = \frac{\alpha}{dx}(3^x \sin x) = \frac{\alpha}{dx}3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{\alpha}{dx}\sin x$$
$$= 3^x \ln 3 \cdot \sin x + 3^x \cos x$$

 $=3^{x}(\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)$.

問3.6.1 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=2^x\cos x$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ. $\frac{d}{dx}2^x=2^x\ln 2$ なので

問
$$3.6.1$$
 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=2^x\cos x$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ.
$$\frac{d}{dx}2^x=2^x\ln 2$$
 なので

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}(2^x \cos x) = \frac{d}{dx}2^x \cdot \cos x + 2^x \frac{d}{dx}\cos x$$

$$dx + dx = dx$$

$$= 2^{x} \ln 2 \cdot \cos x + 2^{x} (-\sin x)$$

$$= 2^x (\ln 2 \cdot \cos x - \sin x) .$$

例 変数 x の関数 $y=\frac{x^3}{5^x}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $y=\frac{x^3}{5^x}$ を微分する. $\frac{d}{dx}5^x=5^x\ln 5$ なので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx}x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数
$$x$$
 の関数 $y=rac{x^3}{5^x}$ を微分する. $rac{d}{dx}5^x=5^x\ln 5$ なので、

 $= \frac{3x^2 - x^3 \ln 5}{5x} \ .$

$$\frac{d}{dx}5^x = 5^x \ln 5$$
 なので

$$du = d r^3$$

$$ax$$
 $1 x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx}x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2} = \frac{3x^2 \cdot 5^x - x^3 \cdot 5^x \ln 5}{(5^x)^2}$$

$$\frac{d}{d}$$

$$rac{d}{dx}5^x = 5^x \ln 5$$
 なので、

終

問
$$3.6.2$$
 変数 x の関数 $y=rac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ.

問3.6.2 変数
$$x$$
 の関数 $y = \frac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ.
$$dy_{-} d \sin x_{-} \frac{d}{dx} \sin x \cdot 3^x - \sin x \cdot \frac{d}{dt} 3^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{3^x} = \frac{\frac{d}{dx} \sin x \cdot 3^x - \sin x \cdot \frac{d}{dt} 3^x}{(3^x)^2} = \frac{\cos x \cdot 3^x - \sin x \cdot 3^x \ln 3}{(3^x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} \frac{\sin x}{3^x} = \frac{dx}{(3^x)^2} = \frac{\cot x}{(3^x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{(3^x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \ln 3 \cdot \sin x}{(3^x)^2}.$$

| • |
|-------|
| 3^x |

| J | |
|---|--|
| | |
| | |
| | |

例 変数 x の関数 $y=e^{2x-3}$ を微分する.

例 変数
$$x$$
 の関数 $y=e^{2x-3}$ を微分する. 変数 t を $t=2x-3$ とおく. $y=e^{2x-3}=e^t$ なので, dy d t d t

変数
$$t$$
 を $t=2x-3$ とお

変数
$$t$$
 を $t=2x-3$ とおく. $y=e^{2x-3}=e^t$ た $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}e^t=\frac{d}{dt}e^t\cdot\frac{dt}{dx}$

 $\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$

変数
$$t$$
 を $t=2x-3$ とおく. $y=e^{2x-3}=e^t$ なので,
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}e^t=\frac{d}{dt}e^t\cdot\frac{dt}{dx}=e^t\cdot\frac{d}{dx}(2x-3)=e^{2x-3}\cdot 2$$

終

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = e^{2x - 3} \cdot 2$$
$$= 2e^{2x - 3}.$$

例 変数 x の関数 $y=e^{2x-3}$ を微分する.

問3.6.3 変数 u の関数 $v=e^{5-3u}$ を微分せよ.

問3.6.3 変数
$$u$$
 の関数 $v=e^{5-3u}$ を微分せよ. 変数 t を $t=5-3u$ とおく.
$$\frac{dv}{du}=\frac{d}{du}e^{5-3u}=\frac{d}{du}e^t=\frac{d}{dt}e^t\cdot\frac{dt}{du}=e^t\cdot\frac{d}{du}(5-3u)=e^{5-3u}\cdot(-3)$$

終

 $= -3e^{5-3u}$

定数 p に対して、変数 x の冪関数 $y=x^p$ (x>0) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p=\frac{dy}{dx}$

を求める.

定数
$$p$$
 に対して、変数 x の冪関数 $y=x^p$ ($x>0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p=\frac{dy}{dx}$ を求める. $y=x^p$ の自然対数をとると,
$$\ln y=\ln x^p=p\ln x \ .$$

を求める. $y=x^p$ の自然対数をとると, $\ln y = \ln x^p = p \ln x$.

定数 p に対して、変数 x の冪関数 $y=x^p$ (x>0) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p=\frac{dy}{dx}$

この等式の両辺を
$$x$$
 で微分する :

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p\ln x) . \tag{*}$$

を求める. $y=x^p$ の自然対数をとると, $\ln y = \ln x^p = p \ln x$. この等式の両辺を x で微分する:

定数 p に対して、変数 x の冪関数 $y=x^p$ (x>0) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p=\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p\ln x) . \tag{*}$$

この等式
$$(*)$$
 の左辺は d 。 d 。 du 1 du

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} .$$

$$\frac{d}{d} f(y) - \frac{d}{d} f(y) \cdot \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dx}J(y) - \frac{dy}{dy}J(y) \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$ax = ay = ax$$

を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると, $\ln y = \ln x^p = p \ln x$. この等式の両辺を x で微分する:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p\ln x) . \tag{*}$$

定数 p に対して、変数 x の冪関数 $y=x^p$ (x>0) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p=\frac{dy}{dx}$

この等式 (*) の左辺は

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} .$$

 $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$.

$$p$$
 は定数なので、等式 $(*)$ の右辺は

$$\frac{d}{d}(n \ln x) = n \frac{d}{d} \ln x = n \frac{1}{d}$$

 $\frac{d}{dx}(p\ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x} .$

$$\frac{d}{dx}(p\ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x} .$$

$$dx^{(p m x)} - p dx^{m x} - p x$$
.

を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると, $\ln y = \ln x^p = p \ln x .$ この等式の両辺を x で微分する:

(*)

定数 p に対して、変数 x の冪関数 $y=x^p$ (x>0) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p=\frac{dy}{dx}$

 $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p\ln x)$.

この等式
$$(*)$$
 の左辺は d , dv $1 \, dv$

 $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$.

$$p$$
 は定数なので、等式 $(*)$ の右辺は $\frac{d}{d}(n \ln x) = n \frac{d}{d} \ln x$

 $\frac{d}{dx}(p\ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x}$.

よって
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=p\frac{1}{x}$$
 なので $\frac{dy}{dx}=p\frac{y}{x}$, $y=x^p$ なので $\frac{d}{dx}x^p=p\frac{x^p}{x}=px^{p-1}$.

定理 定数
$$p$$
 を指数とする冪関数 x^p ($x>0$) の導関数は
$$\frac{d}{dx}x^p=px^{p-1}.$$

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} .$$

定数 n が正の整数であるとき $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$; 定数 n が整数であるとき $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$);

定数 p が実数であるとき $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ (x>0).

冪関数の指数の範囲が広がると独立変数 x の値の範囲は狭まる.

冪関数の微分公式を並べてみる.

 $oldsymbol{eta}$ 変数 x の関数 $\sqrt[3]{x^2}$ を微分する.

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt[3]{x^2}$ を微分する.
$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\pi}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{\pi}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\pi}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\pi}x^{-\frac{1}{3}}$$
.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}^2 = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$
 定数して $\frac{d}{dx}x^p = nx^{p-1}$

定数
$$p$$
 に対して $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$

数
$$p$$
 に対して $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$

$$\frac{d}{dx}y = px^{2}$$

終

問3.6.4 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x}$ を微分せよ.

問
$$3.6.4$$
 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x}$ る微分せよ.
$$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{x}$$
 $3 = \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x}}$.

| 終 |
|---|
| |
| |
| |

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ $(x>0)$ を微分する.

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ $(x>0)$ を微分する.
$$\sqrt{\frac{5}{3x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{cor},$$

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.
$$\sqrt{\frac{5}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} \frac{1}{1} = \sqrt{\frac{5}{5}} x^{-\frac{1}{2}}$$
 なので.

$$\sqrt{3}x$$
 $\sqrt{3}\sqrt{x}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ $(x>0)$ を微分する.
$$\sqrt{\frac{5}{3x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{なので,}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{5}{3x}} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{5}{3x}} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$dx \vee 3x \qquad dx \vee 3^{\omega} \qquad \vee 3 \wedge 2^{\omega}$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{12}} .$$

| ` | , | , | , | |
|-----------------|-------------------|---|---|---|
| $=-\frac{1}{x}$ | $\frac{5}{12x}$. | | | [|

$$= -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{5}{12x}} .$$

$$x \vee 12x$$

問3.6.5 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ (x>0) を微分せよ.

$$3.6.\overline{5}$$
 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ $(x>0)$ を微分せよ.

問
$$3.6.5$$
] 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ ($x>0$) を微分せよ.
$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{5x}}=\sqrt{\frac{6}{5}}\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{6}{5}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{3}{10x}} \ .$$

$$3.6.5$$
 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ $(x>0)$ を微分せよ.

終

| 3.6.5 変数 | x の関数 | $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ | (x>0) を微分せよ. | |
|----------|-------|-----------------------|--------------|--|
| | | _ | | |

例 変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する.

- 例 変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する. 変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので、

例 変数
$$y$$
 の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する. 変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので, $\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}$

 $\frac{d}{du}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{du}$

例 変数
$$y$$
 の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する. 変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので, $\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(y^2-3y+5)=$

| $\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}} =$ | $\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy}(y^2 - 3y + 5) =$ |
|---|--|
| 定数 p に対して | $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ |

例 変数
$$y$$
 の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する. 変数 t を $t=y^2-3y+5$ とおく. $z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,
$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(y^2-3y+5)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(2y-3)$$

$$=\frac{2y-3}{2\sqrt{y^2-3y+5}} \ .$$

[B3.6.6]変数 y の関数 $z = \sqrt{3y^2 - 5y + 4}$ を微分せよ.

問3.6.6 変数
$$y$$
 の関数 $z=\sqrt{3y^2-5y+4}$ を微分せよ. 変数 t を $t=3y^2-5y+4$ とおく. $z=\sqrt{3y^2-5y+4}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので,
$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(3y^2-5y+4)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(6y-5)$$

$$=\frac{6y-5}{2\sqrt{3y^2-5y+4}}\;.$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7 における f の微分係数を求める. 変数 t を t=5x+1 とおく. $f(x)=\sqrt{5x+1}^3=\sqrt{t}^3=t^{\frac{3}{2}}$ なので,

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7 における f の微分係数を求める. 変数 t を t=5x+1 とおく. $f(x)=\sqrt{5x+1}^3=\sqrt{t}^3=t^{\frac{3}{2}}$ なので, f の導関数 f' は

関数
$$f'$$
 は
$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7における f の微分係数を求める. 変数 t を t=5x+1 とおく. $f(x)=\sqrt{5x+1}^3=\sqrt{t}^3=t^{\frac{3}{2}}$ なので. fの導関数 f' は

関数
$$f'$$
 は
$$f'(x) = \frac{d}{dt}f(x) = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dt}(5x+1)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(5x+1)$$

$$f'(x) = \frac{a}{dx}f(x) = \frac{a}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{at}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{dx}(5x+1)$$

定数 p に対して $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$

における
$$f$$
 の微分係数を求める. 変数 t を $t=5x+1$ とおく. $f(x)=\sqrt{5x+1}^3=\sqrt{t}^3=t^{\frac{3}{2}}$ なので, f の導関数 f' は

の導関数
$$f'$$
 は
$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(5x+1) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot 5$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(5x+1) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot 5$$
$$= \frac{15}{2}\sqrt{5x+1} .$$

における
$$f$$
 の微分係数を求める. 変数 t を $t=5x+1$ とおく. $f(x)=\sqrt{5x+1}^3=\sqrt{t}^3=t^{\frac{3}{2}}$ なので、 f の導関数 f' は
$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(5x+1)=\frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot 5$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7

$$=\frac{15}{2}\sqrt{5x+1} .$$

$$=rac{1}{2}\sqrt{3x+1}$$
 . f の微分係数は

終

おける
$$f$$
 の微分係数は $f'(7) = \frac{15}{5} \sqrt{\frac{5}{5} + \frac{1}{1}} = \frac{15}{15} \sqrt{\frac{26}{26}} = \frac{15}{6} = \frac{45}{6}$

$$f'(7) = \frac{15}{2} \sqrt{5 \cdot 7 + 1} = \frac{15}{2} \sqrt{36} = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45 .$$

$$f'(7) = \frac{15}{2}\sqrt{5\cdot 7 + 1} = \frac{15}{2}\sqrt{36} = \frac{15}{2}\cdot 6 = 45$$
.

$$f'(7) = \frac{15}{2}\sqrt{5\cdot7+1} = \frac{15}{2}\sqrt{36} = \frac{15}{2}\cdot6 = 45$$
.

$$f'(7) = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 7 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 45$$
.

問
$$3.6.7$$
 区間 $\left[\frac{5}{6},\infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sqrt{6x-5}^3$ と定める. g における g の微分係数を求めよ. 変数 t を $t=$ とおく.

q'(9) =

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{6x - 5}^3 =$$

9 における g の微分係数は

問3.6.7 区間 $\left[\frac{5}{6},\infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sqrt{6x-5}^3$ と定める. 9 における q の微分係数を求めよ. 変数 t を t=6x-5 とおく

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{6x - 5}^{3} = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(6x - 5) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \cdot 6$$

$$g(x) = \frac{1}{dx} \sqrt{6x - 5} = \frac{1}{dx} t^2 = \frac{1}{dt} t^2 \cdot \frac{1}{dx} = \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{1}{dx} (6x - 5) = \frac{1}{2} \sqrt{t} \cdot 6$$
$$= 9\sqrt{6x - 5} .$$

$$=9\sqrt{6x-5}$$
 .

こおける
$$g$$
 の微分係数は

$$9$$
 における g の微分係数は

$$q'(9) =$$
 .

問
$$3.6.7$$
 区間 $\left[\frac{5}{6},\infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sqrt{6x-5}^3$ と定める. 9 における g の微分係数を求めよ. 変数 t を $t=6x-5$ とおく. $g'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{6x-5}^3=\frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}}=\frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(6x-5)=\frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot 6$

$$g$$
 における g の微分係数は

における g の微分係数は
$$g'(9) - 9\sqrt{6\cdot 9 - 5} - 9\sqrt{49} - 63$$

$$g'(9) = 9\sqrt{6 \cdot 9 - 5} = 9\sqrt{49} = 63.$$

$$g'(9) = 9\sqrt{6 \cdot 9 - 5} = 9\sqrt{49} = 63.$$

$$g'(9) = 9\sqrt{6 \cdot 9 - 5} = 9\sqrt{49} = 63.$$

変数 x の関数 $\ln |x|$ の導関数を考える.

変数
$$x$$
 の関数 $\ln |x|$ の導関数を考える. $x>0$ のとき, $|x|=x$ なので,
$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \ .$$

$$x>0$$
 のとき, $|x|=x$ なので,
$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}\;.$$

 $\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$

 $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{dx}$$

変数 x の関数 $\ln |x|$ の導関数を考える.

$$\frac{1}{dx}\ln|x|=\frac{1}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$
 . 変数 x について $x<0$ のとき, $y=-x$ とおくと, $|x|=-x=y>0$ な

ので.

$$x>0$$
 のとき, $|x|=x$ なので, $rac{d}{dx}\ln|x|=rac{d}{dx}\ln x=rac{1}{x}$.

故に、x>0 のときも x<0 のときも $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$.

 $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

$$rac{a}{dx}\ln|x|$$
 =

変数
$$x$$
 について $x<0$ のとき, $y=-x$ とおくと, $|x|=-x=y>0$ な

変数
$$x$$
 について x

変数
$$x$$
 について x ので.

$$x < 0$$
 σ

変数 x の関数 $\ln |x|$ の導関数を考える.

$$x>0$$
 のとき, $|x|=x$ なので,
$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}\;.$$

変数
$$x$$
 について $x<0$ のとき, $y=-x$ とおくと, $|x|=-x=y>0$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{1}{dx}\ln|x| = \frac{1}{dx}\ln y = \frac{1}{dy}\ln y \cdot \frac{1}{dx} = \frac{1}{y}\frac{1}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

故に、
$$x>0$$
 のときも $x<0$ のときも $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$.

定理 関数
$$\ln |x|$$
 ($x \neq 0$) の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

変数 x の関数 $\ln |x|$ の導関数を考える.

例 変数 y の関数 $z=\ln|y^3+2|$ を微分する. 変数 t を $t=y^3+2$ とおく. $z=\ln|y^3+2|=\ln|t|$ なので,

例 変数
$$y$$
 の関数 $z=\ln|y^3+2|$ を微分する. 変数 t を $t=y^3+2$ とおく. $z=\ln|y^3+2|=\ln|t|$ なので, $\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}\ln|t|=\frac{d}{dt}\ln|t|\cdot\frac{dt}{dy}$

変数
$$t$$
 を $t=y^3+2$ とおく. $z=\ln|y^3+2|=\ln|t|$ なので, dz d , dt

 $\frac{d}{du}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{du}$

変数
$$t$$
 を $t=y^3+2$ とおく. $z=\ln|y^3+2|=\ln|t|$ なので、
$$\frac{dz}{dy}=\frac{d}{dy}\ln|t|=\frac{d}{dt}\ln|t|\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dy}(y^3+2)=\frac{1}{y^3+2}3y^2$$

終

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} \ln|t| = \frac{d}{dt} \ln|t| \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dy} (y^3 + 2) = \frac{3y^2}{y^3 + 2}.$$

例 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

 $\boxed{ \mathbb{B}3.6.8 }$ 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ.

問
$$3.6.8$$
 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ. 変数 t を $t = \cos x$ とおく. dy

 $=-\tan x$.

変数
$$t$$
 を $t = \cos x$ とおく.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln|\cos x| = \frac{d}{dx}$$

そ数
$$t \in t = \cos x$$
 とおく.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln|\cos x| = \frac{d}{dx} \ln|t| = \frac{d}{dt} \ln|t| \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln|\cos x| = \frac{d}{dx}$$

$$=\frac{d}{\ln \ln t}$$

$$d$$
 ,

 $= \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dx} \cos x = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$

終