3.7　逆三角関数の導関数

逆三角関数について以下の性質が成り立つ.

各実数 x について, $\tan x$ の値があり,

$$\tan(\tan^{-1}x) = x \ .$$

$-1 \leq x \leq 1$ である各実数 x について, $\sin^{-1}x$ の値があり, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \dfrac{\pi}{2}$ で,

$$\sin(\sin^{-1}x) = x \ .$$

$-1 \leq x \leq 1$ である各実数 x について, $\cos^{-1}x$ の値があり, $0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ で,

$$\cos(\cos^{-1}x) = x \ .$$

正接関数 $\tan x$ の導関数は次のようになった：

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (\ \cos x \neq 0\ ).$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1} x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx} \tan^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1} x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx} \tan^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1} x) = x \ .$$

変数 x の逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x \ .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1} x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx} \tan^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1} x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x \ .$$

この等式の左辺は，微分公式 $\dfrac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x$ より

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dy} \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} \ ,$$

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x \ .$$

この等式の左辺は，微分公式 $\dfrac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$ より

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dy}\tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} \ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x = 1$ なので，$(1 + \tan^2 y)\dfrac{dy}{dx} = 1$ ，よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \ .$$

変数 x の逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x \ .$$

この等式の左辺は，微分公式 $\dfrac{d}{dx}\tan x = 1+\tan^2 x$ より

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dy}\tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx} \ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x=1$ なので， $(1+\tan^2 y)\dfrac{dy}{dx}=1$ ，よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \ .$$

$y=\tan^{-1}x$ より $\tan y=\tan(\tan^{-1}x)=x$ なので， $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$.

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1} x) = x \ .$$

　変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1} x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}x \ .$$

変数 x の逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ ($-1\leq x\leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}x \ .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dy}\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx} \ ,$$

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

変数 x の逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x \ .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}x \ .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dy}\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x = 1$ なので, $\cos y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$, よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \ .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} .$$

$\cos y$ を x の式で表す.

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \ .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1} x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2} \ .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \ .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1} x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \ .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \ .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1} x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ ,$$

変数 x の逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \ .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1-x^2} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1-x^2} \ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

$y=\sin^{-1}x$ なので $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

変数 x の逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$（ $-1\leq x\leq 1$ ）の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx} \cos^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\cos y \;=\; \cos(\cos^{-1} x) \;=\; x \quad .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\cos y \;=\; \cos(\cos^{-1} x) \;=\; x \quad .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\cos y \;=\; \frac{d}{dx} x \quad .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ （ $-1 \leq x \leq 1$ ） の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\cos y = \cos(\cos^{-1} x) = x \ .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dx}x \ .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dy}\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} \ ,$$

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ （ $-1 \leq x \leq 1$ ） の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = \dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\cos y = \cos(\cos^{-1} x) = x \ .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dx}x \ .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dy}\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} \ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx}x = 1$ なので， $-\sin y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ ， よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \ .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \ .$$

$\sin y$ を x の式で表す.

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \ .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1} x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - x^2} \ .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \ .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1} x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - x^2} \ .$$

$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2} \ .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1} x$ について

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \ .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1} x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - x^2} \ .$$

$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2} \ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ ,$$

変数 x の逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ について

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \ .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 \ ,$$

$$\sin y = \pm\sqrt{1-x^2} \ .$$

$0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1-x^2} \ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

$y=\cos^{-1}x$ なので $\displaystyle \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

定理　逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ 及び逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の導関数は，各々，

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\ -1<x<1\ ),$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\ -1<x<1\ ).$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める．関数 f の導関数 f' を求める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \tan^{-1} x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \tan^{-1} t + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x)$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を求める.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \tan^{-1} x) = \frac{d}{dx}x^2 \cdot \tan^{-1} t + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\
&= 2x \cdot \tan^{-1} x + x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
&= 2x \tan^{-1} x + \frac{x^2}{x^2+1} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 s の関数 $t = \dfrac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

$\boxed{例}$ 変数 s の関数 $t = \dfrac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\sin^{-1} s}{s^2} = \frac{\dfrac{d}{ds}\sin^{-1} s \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot \dfrac{d}{ds}s^2}{(s^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x)\,\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数 s の関数 $t = \dfrac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{\sin^{-1} s}{s^2} = \frac{\dfrac{d}{ds}\sin^{-1} s \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot \dfrac{d}{ds}s^2}{(s^2)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot 2s}{s^4} = \frac{s^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}}{s^4} - \frac{2s\sin^{-1} s}{s^4}$$

$$= \frac{1}{s^2\sqrt{1-s^2}} - \frac{2\sin^{-1} s}{s^3} .$$

終

$\boxed{問 3.7.1}$ 変数 u の関数 $v = \dfrac{\tan^{-1} u}{u^2+1}$ を微分せよ.

問3.7.1 変数 u の関数 $v = \dfrac{\tan^{-1} u}{u^2+1}$ を微分せよ.

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}\frac{\tan^{-1} u}{u^2+1} = \frac{\dfrac{d}{du}\tan^{-1} u \cdot (u^2+1) - \tan^{-1} u \cdot \dfrac{d}{du}(u^2+1)}{(u^2+1)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{u^2+1} \cdot (u^2+1) - \tan^{-1} u \cdot 2u}{(u^2+1)^2}$$

$$= \frac{1 - 2u\tan^{-1} u}{(u^2+1)^2} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}3.7.2}$ 区間 $[-1,1]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = (1-x^2)\sin^{-1} x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求めよ．

$\boxed{\text{問}3.7.2}$ 区間 $[-1,1]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = (1-x^2)\sin^{-1}x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求めよ．

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}\{(1-x^2)\sin^{-1}x\} = \frac{d}{dx}(1-x^2)\cdot\sin^{-1}x + (1-x^2)\frac{d}{dx}\sin^{-1}x \\
&= -2x\sin^{-1}x + (1-x^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-x^2} - 2x\sin^{-1}x \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\sin^{-1} x^2$ を微分せよ.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin^{-1} x^2$ を微分せよ.

変数 y を $y = x^2$ とおく. $\sin^{-1} x^2 = \sin^{-1} y$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin^{-1} x^2$ を微分せよ.

変数 y を $y = x^2$ とおく. $\sin^{-1} x^2 = \sin^{-1} y$ なので,

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x^2 = \frac{d}{dx}\sin^{-1} y = \frac{d}{dy}\sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分せよ.

変数 y を $y=x^2$ とおく. $\sin^{-1}x^2=\sin^{-1}y$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^{-1}x^2 &= \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{d}{dx}x^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot 2x\\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.7.3}$ 変数 t の関数 $\tan^{-1} t^3$ を微分せよ.

$\boxed{問3.7.3}$ 変数 t の関数 $\tan^{-1} t^3$ を微分せよ.

変数 x を $x = t^3$ とおく.

$$\frac{d}{dt}\tan^{-1} t^3 = \frac{d}{dt}\tan^{-1} x = \frac{d}{dx}\tan^{-1} x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+x^2}\,\frac{d}{dt}t^3 = \frac{1}{1+(t^3)^2}3t^2$$

$$= \frac{3t^2}{1+t^6}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}3.7.4}$ 変数 y の関数 $z = \sqrt{\cos^{-1} y}$ を微分せよ.

$\boxed{問3.7.4}$ 変数 y の関数 $z = \sqrt{\cos^{-1} y}$ を微分せよ.

変数 t を $t = \cos^{-1} y$ とおく.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy}\sqrt{\cos^{-1} y} = \frac{d}{dy}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} \\
&= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dy}\cos^{-1} y = \frac{1}{2\sqrt{\cos^{-1} y}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{(1-y^2)\cos^{-1} y}} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$