3.8 合成関数の微分法

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする． 変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおく． 合成関数の微分法の公式

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

が成り立つ．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする． 変数 x, t を $t=\varphi(x)$ とおく． 合成関数の微分法の公式

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

が成り立つ． $t=\varphi(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big) \ , \quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'\big(\varphi(x)\big) \ , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x) \ ,$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．変数 x, t を $t=\varphi(x)$ とおく．合成関数の微分法の公式

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

が成り立つ．$t=\varphi(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f\bigl(\varphi(x)\bigr)\ , \quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'\bigl(\varphi(x)\bigr)\ , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x)\ ,$$

従って

$$\frac{d}{dx}f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f'\bigl(\varphi(x)\bigr)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．変数 x,t を $t=\varphi(x)$ とおく．合成関数の微分法の公式

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

が成り立つ． $t=\varphi(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big)\ ,\quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'\big(\varphi(x)\big)\ ,\quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x)\ ,$$

従って

$$\frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big) = f'\big(\varphi(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$$

定理　微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき，

$$\frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big) = f'\big(\varphi(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$$

定理　微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき，

$$\frac{d}{dx}f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f'\bigl(\varphi(x)\bigr)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$$

定理　微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき，

$$\frac{d}{dx}f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f'\bigl(\varphi(x)\bigr)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x) \ .$$

この公式において $\varphi(x)$ を $\boxed{}$ で置き換えた公式もどきを示す：

$$\frac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{}) \ .$$

定理　微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき，

$$\frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big) = f'\big(\varphi(x)\big) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x) \ .$$

　この公式において $\varphi(x)$ を $\boxed{\quad}$ で置き換えた公式もどきを示す：

$$\frac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) \ .$$

$f(\boxed{\quad})$ を微分するには，外側の関数 f だけを微分して f の中身の $\boxed{\quad}$ はそのままにした式 $f'(\boxed{\quad})$ に f の中身 $\boxed{\quad}$ を微分した式 $\dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ を掛ける．

定理　微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき，

$$\frac{d}{dx}f\bigl(\varphi(x)\bigr) = f'\bigl(\varphi(x)\bigr)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$$

この公式において $\varphi(x)$ を $\boxed{}$ で置き換えた公式もどきを示す：

$$\frac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{})\ .$$

$f(\boxed{})$ を微分するには，外側の関数 f だけを微分して f の中身の $\boxed{}$ はそのままにした式 $f'(\boxed{})$ に f の中身 $\boxed{}$ を微分した式 $\dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ を掛ける．

これまで述べた微分公式より以下の公式もどきが導かれる．

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において，定数 p に対して $f(x) = x^p$ とおくと， $f'(\boxed{}) = p(\boxed{})^{p-1}$ なので，

$$\frac{d}{dx}(\boxed{})^p = p(\boxed{})^{p-1} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，1 以外の正の定数 a に対して $f(x) = a^x$ とおくと， $f'(\boxed{\quad}) = a^{\boxed{\quad}} \ln a$ なので，

$$\frac{d}{dx}a^{\boxed{\quad}} = a^{\boxed{\quad}} \ln a \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) \ .$$

特に自然対数の底 e に対して

$$\frac{d}{dx}e^{\boxed{\quad}} = e^{\boxed{\quad}} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) \ .$$

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，1 以外の正の定数 a に対して $f(x) = \log_a x$ とおくと， $f'(\boxed{\quad}) = \frac{1}{(\boxed{\quad})\ln a}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\log_a(\boxed{\quad}) = \frac{1}{(\boxed{\quad})\ln a} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) \ .$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ について

$$\frac{d}{dx}\ln(\boxed{\quad}) = \frac{1}{\boxed{\quad}} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) \ .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において，$f(x) = \sin x$ とおくと，$f'(\boxed{}) = \cos(\boxed{})$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\boxed{}) = \cos(\boxed{}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{}) \; .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，$f(x) = \sin x$ とおくと，$f'(\boxed{\quad}) = \cos(\boxed{\quad})$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\boxed{\quad}) = \cos(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，$f(x) = \cos x$ とおくと，$f'(\boxed{\quad}) = -\sin(\boxed{\quad})$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos(\boxed{\quad}) = -\sin(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，$f(x) = \sin x$ とおくと，$f'(\boxed{\quad}) = \cos(\boxed{\quad})$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\boxed{\quad}) = \cos(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，$f(x) = \cos x$ とおくと，$f'(\boxed{\quad}) = -\sin(\boxed{\quad})$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos(\boxed{\quad}) = -\sin(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において，$f(x) = \tan x$ とおくと，$f'(\boxed{\quad}) = \sec^2(\boxed{\quad}) = \dfrac{1}{\cos^2(\boxed{\quad})}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\tan(\boxed{\quad}) = \sec^2(\boxed{\quad}) \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) = \frac{1}{\cos^2(\boxed{\quad})} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において， $f(x) = \tan^{-1} x$

とおくと， $f'(\boxed{\quad}) = \dfrac{1}{1+(\boxed{\quad})^2}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\boxed{\quad}) = \frac{1}{1+(\boxed{\quad})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において，$f(x) = \tan^{-1} x$

とおくと，$f'(\boxed{}) = \dfrac{1}{1+(\boxed{})^2}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\boxed{}) = \frac{1}{1+(\boxed{})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{}) \cdot \dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において，$f(x) = \sin^{-1} x$

とおくと，$f'(\boxed{}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\boxed{})^2}}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\boxed{}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\boxed{})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

例 変数 x の関数 $\sin\dfrac{5x+4}{3}$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin\dfrac{5x+4}{3}$ を微分する．これまでは $\dfrac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t とかに置き換えて微分した．新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明を記さなければならない．説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えることなく微分すること．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin\dfrac{5x+4}{3}$ を微分する．これまでは $\dfrac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t とかに置き換えて微分した．新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明を記さなければならない．説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えることなく微分すること．

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad\quad})=f'(\boxed{\quad\quad})\dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad\quad})$ において $f(x)=\sin x$ とおくと， $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\boxed{\quad\quad})=\cos(\boxed{\quad\quad})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{\quad\quad})\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin\dfrac{5x+4}{3}$ を微分する．これまでは $\dfrac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t とかに置き換えて微分した．新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明を記さなければならない．説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えることなく微分すること．

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{})\,\dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において $f(x)=\sin x$ とおくと， $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\boxed{}) = \cos(\boxed{})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{}) \ .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に $\dfrac{5x+4}{3}$ を代入する．

$$\frac{d}{dx}\sin\frac{5x+4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cos\frac{5x+4}{3} \ .$$

例 変数 x の関数 $\sin\dfrac{5x+4}{3}$ を微分する．これまでは $\dfrac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t とかに置き換えて微分した．新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明を記さなければならない．説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えることなく微分すること．

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad}) = f'(\boxed{\quad})\dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において $f(x) = \sin x$ とおくと， $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\boxed{\quad}) = \cos(\boxed{\quad})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{\quad}) .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{\quad}$ に $\dfrac{5x+4}{3}$ を代入する．

$$\frac{d}{dx}\sin\frac{5x+4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cos\frac{5x+4}{3} .$$

答案にはこの最後の等式だけを記せばよい． 終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}$ を微分する．

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{})\dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において $f(x)=\cos x$ とおくと， $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos(\boxed{}) = -\sin(\boxed{})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

例 変数 x の関数 $\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}$ を微分する.

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{})\dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において $f(x)=\cos x$ とおくと, $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ なので,

$$\frac{d}{dx}\cos(\boxed{}) = -\sin(\boxed{})\cdot\frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に $\dfrac{\pi(3x-2)}{5}$ を代入する.

$$\frac{d}{dx}\cos\frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5}\cdot\frac{3\pi}{5}$$

$$= -\frac{3\pi}{5}\sin\frac{\pi(3x-2)}{5} .$$

終

$\boxed{問3.8.1}$ 変数 x の関数 $\tan \dfrac{\pi(5x-4)}{7}$ を微分せよ.

$\boxed{問 3.8.1}$ 変数 x の関数 $\tan\dfrac{\pi(5x-4)}{7}$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dx}\tan\frac{\pi(5x-4)}{7} = \sec^2\frac{\pi(5x-4)}{7}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\pi(5x-4)}{7} = \sec^2\frac{\pi(5x-4)}{7}\cdot\frac{5\pi}{7}$$
$$= \frac{5\pi}{7}\sec^2\frac{\pi(5x-4)}{7}\ .$$

$\boxed{終}$

例 変数 x の関数 $\ln|e^x - 3|$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\ln|e^x-3|$ を微分する.

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{\quad})=f'(\boxed{\quad})\dfrac{d}{dx}(\boxed{\quad})$ において $f(x)=\ln|x|$ とおくと, $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|\boxed{\quad}|=\frac{1}{\boxed{\quad}}\frac{d}{dx}(\boxed{\quad})\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\ln|e^x - 3|$ を微分する.

公式もどき $\dfrac{d}{dx}f(\boxed{}) = f'(\boxed{})\dfrac{d}{dx}(\boxed{})$ において $f(x) = \ln|x|$ とおくと, $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ なので,

$$\frac{d}{dx}\ln|\boxed{}| = \frac{1}{\boxed{}}\frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に $e^x - 3$ を代入する.

$$\frac{d}{dx}\ln|e^x - 3| = \frac{1}{e^x - 3}\frac{d}{dx}(e^x - 3) = \frac{1}{e^x - 3}e^x = \frac{e^x}{e^x - 3} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 3.8.2}$ 変数 x の関数 $\ln|3e^x - 5|$ を微分せよ.

$\boxed{\text{問}3.8.2}$ 変数 x の関数 $\ln|3e^x - 5|$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dx}\ln|3e^x - 5| = \frac{1}{3e^x - 5}\,\frac{d}{dx}(3e^x - 5) = \frac{3e^x}{3e^x - 5}\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $(\tan^{-1} x)^3$ を微分する.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $(\tan^{-1}x)^3$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので

$$\frac{d}{dx}(\boxed{})^3 = 3(\boxed{})^2\frac{d}{dx}(\boxed{}) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $(\tan^{-1} x)^3$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので

$$\frac{d}{dx}(\boxed{})^3 = 3(\boxed{})^2 \frac{d}{dx}(\boxed{}) .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に $\tan^{-1} x$ を代入する.

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)^3 = 3(\tan^{-1} x)^2 \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = 3(\tan^{-1} x)^2 \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{3(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.8.3}$ 変数 x の関数 $(\sin^{-1}x)^4$ を微分せよ.

問3.8.3 変数 x の関数 $(\sin^{-1} x)^4$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^4 = 4(\sin^{-1} x)^3 \frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{4(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

終

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x+7}}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x+7}}$ を微分する.

$$\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}\,(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x+7}}$ を微分する.

$$\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}\,(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

$\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ なので

$$\frac{d}{dx}(\boxed{\qquad\quad})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\boxed{\qquad\quad})^{-\frac{3}{2}}\,\frac{d}{dx}(\boxed{\qquad\quad}) \quad .$$

例 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{5x+7}}$ を微分する.

$$\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}\,(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

$\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ なので

$$\frac{d}{dx}(\boxed{})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\boxed{})^{-\frac{3}{2}}\,\frac{d}{dx}(\boxed{}) \ .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に $5x+7$ を代入する.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{6}\,(5x+7)^{-\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{6}\,\frac{d}{dx}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}\right)(5x+7)^{-\frac{3}{2}}\,\frac{d}{dx}(5x+7) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{(5x+7)^3}}\cdot 5$$

$$= -5\sqrt{\frac{3}{2(5x+7)^3}} \ .$$

終

$\boxed{問3.8.4}$ 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{x^2+5}}$ を微分せよ.

問3.8.4 変数 x の関数 $\sqrt{\dfrac{6}{x^2+5}}$ を微分せよ.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{x^2+5}} &= \sqrt{6}\,\frac{d}{dx}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5) \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{(x^2+5)^3}}\cdot 2x \\
&= -x\sqrt{\frac{6}{(x^2+5)^3}}\ .
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する.

微分公式 $\dfrac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$ より

$$\frac{d}{dt}e^{\boxed{}} = e^{\boxed{}}\frac{d}{dt}(\boxed{}) \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する.

微分公式 $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ より

$$\frac{d}{dt}e^{\boxed{}} = e^{\boxed{}}\frac{d}{dt}(\boxed{}) \ .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に $\sin t$ を代入する.

$$\frac{d}{dt}e^{\sin t} = e^{\sin t}\frac{d}{dt}\sin t = e^{\sin t}\cos t \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問3.8.5}$ 変数 t の関数 $e^{\tan t}$ を微分せよ.

$\boxed{\text{問}3.8.5}$ 変数 t の関数 $e^{\tan t}$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dt}e^{\tan t} = e^{\tan t}\frac{d}{dx}\tan t = e^{\tan t}\sec^2 t \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^3$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\sin^{-1} x^3$ を微分する.

微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\boxed{}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\boxed{})^2}}\,\frac{d}{dx}(\boxed{}) \; .$$

例 変数 x の関数 $\sin^{-1} x^3$ を微分する.

微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\boxed{}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\boxed{})^2}}\,\frac{d}{dx}(\boxed{}) \ .$$

この等式もどきにおいて $\boxed{}$ に x^3 を代入する.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\cdot\frac{d}{dx}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \ .$$

終

$\boxed{問 3.8.6}$ 変数 x の関数 $\tan^{-1}\sqrt{x}$ を微分せよ.

$\boxed{問3.8.6}$ 変数 x の関数 $\tan^{-1}\sqrt{x}$ を微分せよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{1+\sqrt{x}^{\,2}}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{1+x}\,\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \sin(4x+3)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \sin(4x+3)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot\frac{d}{dx}(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot 4$$
$$= 4\cos(4x+3)\ .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \sin(4x+3)$ と定める．f の導関数 f' を求める．

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot\frac{d}{dx}(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot 4$$
$$= 4\cos(4x+3)\ .$$

よって，

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{x^3\sin(4x+3)\} \\
&= \frac{d}{dx}x^3 \cdot \sin(4x+3) + x^3\cdot\frac{d}{dx}\sin(4x+3) \\
&= 3x^2\cdot\sin(4x+3) + x^3\cdot 4\cos(4x+3) \\
&= 3x^2\sin(4x+3) + 4x^3\cos(4x+3) \\
&= x^2\{3\sin(4x+3) + 4x\cos(4x+3)\}\ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 3.8.7}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^x \cos(3x+1)$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

$\boxed{\text{問}3.8.7}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^x \cos(3x+1)$ と定める.
g の導関数 g' を求めよ.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}\{e^x \cos(3x+1)\} = \frac{d}{dx}e^x \cdot \cos(3x+1) + e^x \frac{d}{dx}\cos(3x+1) \\
&= e^x \cos(3x+1) + e^x\{-\sin(3x+1)\}\frac{d}{dx}(3x+1) \\
&= e^x \cos(3x+1) + e^x\{-\sin(3x+1)\}3 \\
&= e^x\{\cos(3x+1) - 3\sin(3x+1)\} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

例 変数 x の関数 $y = \dfrac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2 = 2e^{2x-3} \quad .$$

例 変数 x の関数 $y = \dfrac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$$\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2 = 2e^{2x-3} \quad .$$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{e^{2x-3}}{x^3} = \frac{\dfrac{d}{dx}e^{2x-3}\cdot x^3 - e^{2x-3}\cdot\dfrac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2} \\
&= \frac{2e^{2x-3}\cdot x^3 - e^{2x-3}\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2xe^{2x-3} - 3e^{2x-3}}{x^4} \\
&= \frac{e^{2x-3}(2x-3)}{x^4} \quad .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{問3.8.8}$ 変数 t の関数 $x = \dfrac{\sin t}{e^{3t-5}}$ の導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ.

$\boxed{問3.8.8}$ 変数 t の関数 $x = \dfrac{\sin t}{e^{3t-5}}$ の導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{e^{3t-5}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\sin t \cdot e^{3t-5} - \sin t \cdot \dfrac{d}{dt}e^{3t-5}}{(e^{3t-5})^2} \\
&= \frac{\cos t \cdot e^{3t-5} - \sin t \cdot e^{3t-5}\dfrac{d}{dt}(3t-5)}{(e^{3t-5})^2} = \frac{\cos t - \sin t \cdot 3}{e^{3t-5}} \\
&= \frac{\cos t - 3\sin t}{e^{3t-5}} .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$