合成関数の微分法

3.8

微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれると する. 変数 x,t を t=arphi(x) とおく. 合成関数の微分法の公式

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

が成り立つ.

する. 変数 x,t を $t=\varphi(x)$ とおく. 合成関数の微分法の公式

微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれると

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

が成り立つ.
$$t=\varphi(x)$$
 なので、

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f(\varphi(x)) , \quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'(\varphi(x)) , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x) ,$$

$$f(t) = \frac{\alpha}{dx} f(\varphi(x))$$
, $\frac{\alpha}{dt} f(t) = f'(t) = f'(\varphi(x))$, $\frac{\alpha c}{dx} = \frac{\alpha}{dx} \varphi(x)$

する. 変数 x,t を $t=\varphi(x)$ とおく. 合成関数の微分法の公式 $\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$

微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれると

が成り立つ.
$$t=\varphi(x)$$
 なので, d ない d ない

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f(\varphi(x)) , \quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'(\varphi(x)) , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x) ,$$

$$\frac{dx}{dx}J(t) = \frac{dx}{dx}J(\varphi(x)) , \quad \frac{dt}{dt}J(t) = J(t) = J(\varphi(x)) , \quad \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dx}\varphi(x) ,$$
従って

$$d_{f(a(m))} - f'(a(m)) d_{a(a(m))}$$

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi(x) .$$

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x)$$
.

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x) .$$

する. 変数 x,t を $t=\varphi(x)$ とおく. 合成関数の微分法の公式 $\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$

微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれると

が成り立つ.
$$t = \varphi(x)$$
 なので,
$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dx}f(\varphi(x)) , \quad \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = f'(\varphi(x)) , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\varphi(x) ,$$

従って $\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x) .$

$$rac{\omega}{dx}f(arphi(x))=f'(arphi(x))\cdotrac{\omega}{dx}arphi(x)$$
 .
E理 微分可能な関数 $arphi$ と f とについて, $arphi$ の値域が f の定義域に含まれ

定理 微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれ

定理 微分可能な関数
$$\varphi$$
 と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれるとき,

E年 版分可能な関数
$$arphi$$
 と j とについて, $arphi$ の他域が j のた我域に含まれるとき,

 $\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x) .$

定理 微分可能な関数
$$\varphi$$
 と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれるとき,
$$\frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big)=f'\big(\varphi(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$$

るとき,

定理 微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれ るとき.

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x) .$$

この公式において $\varphi(x)$ を \bigcirc で置き換えた公式もどきを示す:

 $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square)$.

定理 微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, $\frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big)=f'\big(\varphi(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$

この公式において
$$\varphi(x)$$
 を で置き換えた公式もどきを示す:
$$\frac{d}{dt}f(\mathbb{R}) = f'(\mathbb{R}) \cdot \frac{d}{dt}(\mathbb{R}) \ .$$

ける.

$$\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square) .$$
 $f(\square)$ を微分するには、外側の関数 f だけを微分して f の中身の \square は そのままにした式 $f'(\square)$ に f の中身 \square を微分した式 $\frac{d}{dx}(\square)$ を掛

定理 微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, $\frac{d}{dx}f\big(\varphi(x)\big)=f'\big(\varphi(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)\ .$

この公式において
$$\varphi(x)$$
 を ここ で置き換えた公式もどきを示す:
$$\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square) \ .$$

f(を微分するには、外側の関数 f だけを微分して f の中身の は そのままにした式 f'(の中身 に f の中身 を微分した式 $\frac{d}{dx}($ と掛ける.

これまで述べた微分公式より以下の公式もどきが導かれる.

公式もどき
$$\frac{d}{dx}f(\underline{\hspace{0.5cm}})=f'(\underline{\hspace{0.5cm}})\cdot\frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$$
 において、定数 p に対して $f(x)=x^p$ とおくと、 $f'(\underline{\hspace{0.5cm}})=p(\underline{\hspace{0.5cm}})^{p-1}$ なので、
$$\frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})^p=p(\underline{\hspace{0.5cm}})^{p-1}\cdot\frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$$
 .

$$\frac{d}{dx}(\boxed{)}^p = p(\boxed{)}^{p-1} \cdot \frac{d}{dx}(\boxed{)} .$$

$$\frac{d}{dx}(\square)^p = p(\square)^{p-1} \cdot \frac{d}{dx}(\square) .$$

$$a$$
 に対して $f(x) = a^x$ とおくと、 $f'(\underline{\hspace{0.5cm}}) = a^{\underline{\hspace{0.5cm}}} \ln a$ なので、
$$\frac{d}{dx}a^{\underline{\hspace{0.5cm}}} = a^{\underline{\hspace{0.5cm}}} \ln a \cdot \frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}}) \ .$$

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square)=f'(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square)$ において、1 以外の正の定数

特に自然対数の底 e に対して

所に自然対数の底
$$e$$
 に対して
$$\frac{d}{dx}e^{\square} = e^{\square} \cdot \frac{d}{dx}(\square) \ .$$

a に対して $f(x) = \log_a x$ とおくと、 $f'(\square) = \frac{1}{(\square) \ln a}$ なので、

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square)=f'(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square)$ において、1 以外の正の定数

$$\frac{d}{d}\log_a(\mathbf{r}) = \frac{1}{d} \cdot \frac{d}{d}(\mathbf{r}).$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(\square) = \frac{1}{(\square)\ln a} \cdot \frac{d}{dx}(\square) .$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ について

 $\frac{d}{dx}\ln(\square) = \frac{1}{\square} \cdot \frac{d}{dx}(\square) .$

公式もどき
$$\frac{d}{dx}f(\underline{\hspace{0.5cm}}) = f'(\underline{\hspace{0.5cm}}) \cdot \frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$$
 において、 $f(x) = \sin x$ と おくと、 $f'(\underline{\hspace{0.5cm}}) = \cos(\underline{\hspace{0.5cm}})$ なので、
$$\frac{d}{dx}\sin(\underline{\hspace{0.5cm}}) = \cos(\underline{\hspace{0.5cm}}) \cdot \frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$$
.

$$\frac{d}{dx}\sin(\underline{\hspace{0.5cm}}) = \cos(\underline{\hspace{0.5cm}}) \cdot \frac{d}{dx}$$

おくと、f'($)=\cos($) なので、 $\frac{d}{dx}\sin($ $)=\cos($ $)\cdot\frac{d}{dx}($) . 公式もどき $\frac{d}{dx}f($)=f'($)\cdot\frac{d}{dx}($) において、 $f(x)=\cos x$ と

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square)$ において, $f(x) = \sin x$ と

おくと、
$$f'($$
 $= -\sin($ $)$ なので、
$$\frac{d}{dx}\cos($$
 $) = -\sin($ $) \cdot \frac{d}{dx}($ $)$.

おくと、
$$f'(\square) = \cos(\square)$$
 なので、
$$\frac{d}{dx}\sin(\square) = \cos(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square) \ .$$
 公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square)$ において、 $f(x) = \cos x$ と おくと、 $f'(\square) = -\sin(\square)$ なので、
$$\frac{d}{dx}\cos(\square) = -\sin(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square) \ .$$

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square)$ において, $f(x) = \sin x$ と

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\underline{\hspace{0.5cm}})=f'(\underline{\hspace{0.5cm}})\cdot\frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$ において、 $f(x)=\tan x$ と おくと、 $f'(\underline{\hspace{0.5cm}})=\sec^2(\underline{\hspace{0.5cm}})=\frac{1}{\cos^2(\underline{\hspace{0.5cm}})}$ なので、

 $\frac{d}{dx}\tan(\underline{}) = \sec^2(\underline{}) \cdot \frac{d}{dx}(\underline{}) = \frac{1}{\cos^2(\underline{})} \cdot \frac{d}{dx}(\underline{}) .$

とおくと、
$$f'(\underline{\hspace{1cm}}) = \frac{1}{1 + (\underline{\hspace{1cm}})^2}$$
 なので、
$$\frac{d}{dt} \tan^{-1}(\underline{\hspace{1cm}}) = \frac{1}{1 + (\underline{\hspace{1cm}})^2} \cdot \frac{d}{dt}(\underline{\hspace{1cm}}) .$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\underline{\hspace{1cm}}) = \frac{1}{1+(\underline{\hspace{1cm}})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\underline{\hspace{1cm}}) .$$

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square)=f'(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square)$ において, $f(x)=\tan^{-1}x$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\boxed{)} = \frac{1}{1+(\boxed{)}^2} \cdot \frac{d}{dx}$$

とおくと、 $f'(\underline{\hspace{1cm}}) = \frac{1}{1+(\underline{\hspace{1cm}})^2}$ なので、 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\square) = \frac{1}{1+(\square)^2} \cdot \frac{d}{dx}(\square) .$

公式もどき
$$\frac{d}{dx}f() = f'() \cdot \frac{d}{dx}()$$
 において、 $f(x) = \sin^{-1}x$ なく $f'() = \sin^{-1}x$

公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square)$ において, $f(x) = \tan^{-1}x$

とおくと、
$$f'(\square) = \frac{1}{\sqrt{1-(\square)^2}}$$
 なので、

$$\frac{d}{\sqrt{1-(1-c)^2}} \operatorname{sin}^{-1}(1-c) = \frac{1}{\sqrt{1-c}} \cdot \frac{d}{\sqrt{1-c}}$$

$$\frac{d}{\sqrt{1-(1-c)^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-(1-c)^2}} \qquad \frac{d}{\sqrt{1-(1-c)^2}} \qquad \frac{d}{\sqrt{1-c}} \qquad \frac{d}{\sqrt{1-c}} \qquad \frac{d}{\sqrt{1-c}} \qquad \frac{d}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\underline{}\underline{}\underline{})^{2} = \frac{1}{\sqrt{1-(\underline{}\underline{}\underline{})^{2}}} \cdot \frac{d}{dx}(\underline{\underline{}}\underline{}\underline{}) .$$

例 変数 x の関数 $\sin \frac{5x+4}{3}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\sin\frac{5x+4}{3}$ を微分する. これまでは $\frac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t とかに置き換えて微分した. 新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明を記さなければならない. 説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えることなく微分すること.

とかに置き換えて微分した。新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明 を記さなければならない、説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えるこ となく微分すること. 公式もどき $\frac{d}{dx}f() = f'() \frac{d}{dx}()$ において $f(x) = \sin x$ とおく

と, $f'(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので,

例 変数 x の関数 $\sin \frac{5x+4}{3}$ を微分する. これまでは $\frac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t

 $\frac{d}{dx}\sin(\square) = \cos(\square) \cdot \frac{d}{dx}(\square)$.

とかに置き換えて微分した。新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明 を記さなければならない. 説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えるこ となく微分すること. 公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square)\frac{d}{dx}(\square)$ において $f(x) = \sin x$ とおく と, $f'(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので, $\frac{d}{dr}\sin(\square) = \cos(\square) \cdot \frac{d}{dr}(\square)$. この等式もどきにおいて に $\frac{5x+4}{2}$ を代入する.

例 変数 x の関数 $\sin \frac{5x+4}{3}$ を微分する. これまでは $\frac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t

$$\frac{d}{dx}\sin\frac{5x+4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3} \cdot \frac{d}{dx}\frac{5x+4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cos\frac{5x+4}{3}.$$

を記さなければならない。説明を記すのが面倒であれば変数に置き換えることなく微分すること。 公式もどき
$$\frac{d}{dx}f(\underline{\hspace{0.5cm}})=f'(\underline{\hspace{0.5cm}})\frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$$
 において $f(x)=\sin x$ とおくと、 $f'(x)=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ なので、
$$\frac{d}{dx}\sin(\underline{\hspace{0.5cm}})=\cos(\underline{\hspace{0.5cm}})\cdot\frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.5cm}})$$
 この等式もどきにおいて $\underline{\hspace{0.5cm}}$ に $\frac{5x+4}{3}$ を代入する。
$$\frac{d}{dx}\sin\frac{5x+4}{3}=\cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+4}{3}=\cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\cos\frac{5x+4}{3}$$
 .

答案にはこの最後の等式だけを記せばよい.

例 変数 x の関数 $\sin \frac{5x+4}{3}$ を微分する. これまでは $\frac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t

とかに置き換えて微分した。新しい変数 t に置き換えるときは変数 t の説明

例 変数
$$x$$
 の関数 $\cos\frac{\pi(3x-2)}{5}$ を微分する. 公式もどき $\frac{d}{dx}f() = f'()$ において $f(x) = \cos x$ とおく

 $\frac{d}{dx}\cos(\underline{\hspace{0.2cm}}) = -\sin(\underline{\hspace{0.2cm}}) \cdot \frac{d}{dx}(\underline{\hspace{0.2cm}})$.

と,
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
 なので,

例 変数 x の関数 $\cos \frac{\pi(3x-2)}{\pi}$ を微分する. 公式もどき $\frac{d}{dx}f(\square) = f'(\square)\frac{d}{dx}(\square)$ において $f(x) = \cos x$ とおく

と、
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
 なので、
$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \cdot \frac{d}{dx}\cos(x)$$
.

この等式もどきにおいて
$$\bigcirc$$
 に $\frac{\pi(3x-2)}{5}$ を代入する.

$$\frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5} \cdot \frac{\pi(3x-2)}{5}$$

$$\frac{d}{dx}\cos\frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5} \cdot \frac{d}{dx}\frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5} \cdot \frac{3\pi}{5}$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5}$$

$$= -\frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi (3x-2)}{5}$$

$$= -\frac{3\pi}{5} \sin \frac{\pi (3x-2)}{5}$$

$$\frac{2}{2}$$
.

問
$$3.8.1$$
 変数 x の関数 $an rac{\pi(5x-4)}{7}$ を微分せよ.

問
$$3.8.1$$
 変数 x の関数 $an \frac{\pi(5x-4)}{7}$ $= \sec^2 \frac{\pi(5x-4)}{7}$

問3.8.1 変数
$$x$$
 の関数 $\tan \frac{\pi(5x-4)}{7}$ を微分せよ.
$$\frac{d}{d} \tan \frac{\pi(5x-4)}{d} = \sec^2 \frac{\pi(5x-4)}{d} \cdot \frac{d}{d} \frac{\pi(5x-4)}{d} = \sec^2 \frac{\pi(5x-4)}{d} \cdot \frac{5\pi}{d}$$

$\frac{d}{d} \tan \frac{\pi}{2}$	(5x-4)	$\pi^2 \pi(\xi)$	5x-4	$d \pi$	5x-4	$- \cos^2 \frac{\pi}{2}$	(5x-4)	5π
dx tan	${7}$	BCC	7	dx	7	— sec	7	7
	=	$=\frac{5\pi}{\mathrm{sec}^2}$	$\frac{\pi(5x-}{}$	4)				

$\frac{a}{m}$ tan $\frac{a}{n}$	(000	$\frac{1}{2} - \sec^2 \frac{\pi}{2}$	(000 1	<u> </u>	(000	$\frac{1}{2}$ — $\sec^2 \frac{1}{2}$	1 (00 1	<u> </u>
dx	7	— sec	7	dx	7	— 860	7	7
	•	_		4)	•		•	•
		5π	$_{2} \pi (5x)$	-4)				
		$=\frac{7}{7}$ sec	· —	, .				
			1					

$$= \frac{5\pi}{7} \sec^2 \frac{\pi (5x - 4)}{7} \ .$$

$$= \frac{5\pi}{7} \sec^2 \frac{\pi (5x - 4)}{7} \ .$$

<u></u>	$=\frac{3\pi}{\sec^2}\frac{\pi(\epsilon)}{\epsilon}$	3x-4		
	$\frac{1}{7}$ sec $\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$.	•	
	•	•		

公式もどき
$$\frac{d}{dx}f() = f'() \frac{d}{dx}()$$
 において $f(x) = \ln|x|$ とおくと、 $f'(x) = \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ なので、

と、
$$f'(x) = \frac{\alpha}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$
 なので、
$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} d$$

$$\frac{d}{dx}\ln|\Box | = \frac{1}{dx}(\Box) .$$

例 変数 x の関数 $\ln|e^x-3|$ を微分する.

公式もどき
$$\frac{d}{dx}f() = f'() \frac{d}{dx}()$$
 において $f(x) = \ln|x|$ とおくと、 $f'(x) = \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ なので、

終

$$\frac{d}{dx}\ln|\mathbf{m}| = \frac{1}{\mathbf{m}}\frac{d}{dx}(\mathbf{m}).$$

例 変数 x の関数 $\ln|e^x-3|$ を微分する.

この等式もどきにおいて
$$e^x-3$$
 を代入する.

$$\frac{d}{dx}\ln|e^x - 3| = \frac{1}{e^x - 3}\frac{d}{dx}(e^x - 3) = \frac{1}{e^x - 3}e^x = \frac{e^x}{e^x - 3}.$$

 $\boxed{ \mathbb{B}3.8.2 }$ 変数 x の関数 $\ln |3e^x - 5|$ を微分せよ.

問3.8.2 変数
$$x$$
 の関数 $\ln|3e^x-5|$ を微分せよ.
$$\frac{d}{dx}\ln|3e^x-5|=\frac{1}{3e^x-5}\frac{d}{dx}(3e^x-5)=\frac{3e^x}{3e^x-5} \ .$$

例 変数 x の関数 $(\tan^{-1}x)^3$ を微分する.

例 変数
$$x$$
 の関数 $(\tan^{-1}x)^3$ を微分する. $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$
 なので
$$\frac{d}{dx}(\text{cons})^3 = 3(\text{cons})^2 \frac{d}{dx}(\text{cons}) .$$

例 変数
$$x$$
 の関数 $(\tan^{-1}x)^3$ を微分する.
$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \quad \texttt{for}$$

$$\frac{d}{dx}(\textbf{m})^3 = 3(\textbf{m})^2 \frac{d}{dx}(\textbf{m}) \ .$$

 $= \frac{3(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2} .$

終

この等式もどきにおいて
$$\cot$$
 に $an^{-1}x$ を代入する.

$$\frac{d}{d}$$
 (ts

 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)^3 = 3(\tan^{-1}x)^2 \frac{d}{dx} \tan^{-1}x = 3(\tan^{-1}x)^2 \frac{1}{1+x^2}$

<u>問3.8.3</u> 変数 x の関数 $(\sin^{-1}x)^4$ を微分せよ.

問3.8.3 変数
$$x$$
 の関数 $(\sin^{-1}x)^4$ を微分せよ.
$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^4 = 4(\sin^{-1}x)^3 \frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{4(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}} .$$

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{rac{6}{5x+7}}$ を微分する.

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x+7}}$ を微分する.
$$\sqrt{\frac{6}{5x+7}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}}=\sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x+7}}$ を微分する.
$$\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \ .$$
 $\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ なので

$$\sqrt{3x+1}$$
 $\sqrt{3x+1}$ なので $\frac{d}{dx}$ $\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \end{array} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dx} \left(\begin{array}{c} \end{array} \right)$.





例 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x+7}}$ を微分する.
$$\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}} \ .$$
 $\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ なので

$$\frac{528}{\sqrt{6}}$$

$$\int 6$$

$$\sqrt{\frac{6}{}}$$

$$\sqrt{\frac{6}{6}}$$

$$\frac{6}{6}$$
 d (

この等式もどきにおいて こ に
$$5x+7$$
 を代入する.
$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{6}\frac{d}{dx}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}$$

 $= -5\sqrt{\frac{3}{2(5x+7)^3}} .$

$$\frac{d}{dx}(\text{ })^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\text{ })^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dx}(\text{ })$$
.

$$= \frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{6} (5x+7)^{-\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{6} \frac{d}{dx} (5x+7)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{6} \left(-\frac{1}{2} \right) (5x+7)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dx} (5x+7) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{(5x+7)^3}} \cdot 5$$

$$\boxed{ extrm{B}3.8.4 }$$
変数 x の関数 $\sqrt{rac{6}{x^2+5}}$ を微分せよ.

問3.8.4 変数
$$x$$
 の関数 $\sqrt{\frac{6}{x^2+5}}$ を微分せよ.
$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{x^2+5}} = \sqrt{6} \frac{d}{dx}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+5)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+5)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{(x^2+5)^3}} \cdot 2x$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^2+5)^3}{6}}$$

$$-x\sqrt{\frac{6}{6}}$$

$$=-x\sqrt{\frac{6}{(m^2+5)^3}}$$
.

$$= -x\sqrt{\frac{6}{(x^2+5)^3}} .$$

$$=-x\sqrt{(x^2+5)^3}$$
.

例 変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する.

例 変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する. 微分公式 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ より

 $\frac{d}{dt}e^{\square} = e^{\square}\frac{d}{dt}(\square) .$

例 変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する. 微分公式 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ より $\frac{d}{dt}e^{\Box} = e^{\Box}\frac{d}{dt}(\Box)$.

 $\frac{d}{dt}e^{\sin t} = e^{\sin t} \frac{d}{dt} \sin t = e^{\sin t} \cos t .$

$$dt$$
 dt dt この等式もどきにおいて に $\sin t$ を代入する.

問3.8.5 変数 t の関数 $e^{ an t}$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dt}e^{\tan t} = e^{\tan t} \frac{d}{dx} \tan t = e^{\tan t} \sec^2 t .$$

問3.8.5 変数 t の関数 $e^{ an t}$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dt}e^{\tan t} = e^{\tan t} \frac{d}{dx} \tan t = e^{\tan t} \sec^2 t .$$

<u>例</u>変数 x の関数 $\sin^{-1}x^3$ を微分する.

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sin^{-1}x^3$ を微分する. 微分公式 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より
$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\bigcirc) = \frac{1}{\sqrt{1-(\bigcirc)^2}}\frac{d}{dx}(\bigcirc) .$$

例 変数
$$x$$
 の関数 $\sin^{-1}x^3$ を微分する. 微分公式 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より

 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\underline{}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\underline{})^2}}\frac{d}{dx}(\underline{}).$

$$dx$$
 $\sqrt{1-(1)^2}$ この等式もどきにおいて $(1 x^3)$ を代入する.



 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot \frac{d}{dx}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$

 $\boxed{ \mathbb{B}3.8.6 }$ 変数 x の関数 $an^{-1}\sqrt{x}$ を微分せよ.

問3.8.6 変数
$$x$$
 の関数 $\tan^{-1}\sqrt{x}$ を微分せよ.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{1+\sqrt{x^2}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{1+x}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+x}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

_	1			
$-\frac{1}{2}$	$2\sqrt{x}(1+x)$			

$$2\sqrt{x(1+x)}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\sin(4x+3)$ と定める. f の 導関数 f' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数
$$f$$
 を $f(x)=x^3\sin(4x+3)$ と定める. f の 導関数 f' を求める.
$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3)=\cos(4x+3)\cdot\frac{d}{dx}(4x+3)=\cos(4x+3)\cdot4$$

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \cos(4x+3) \cdot \frac{d}{dx}(4x+3) = \cos(4x+3) \cdot 4$$

$$dx = 4\cos(4x+3) .$$

例 実数全体を定義域とする関数
$$f$$
 を $f(x)=x^3\sin(4x+3)$ と定める. f の 導関数 f' を求める.
$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3)=\cos(4x+3)\cdot\frac{d}{dx}(4x+3)=\cos(4x+3)\cdot 4$$

$$=4\cos(4x+3)\ .$$
 よって,
$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\{x^3\sin(4x+3)\}$$

$$=\frac{d}{dx}x^3\cdot\sin(4x+3)+x^3\cdot\frac{d}{dx}\sin(4x+3)$$

$$=3x^2\sin(4x+3)+4x^3\cos(4x+3)$$

 $= x^{2} \{3\sin(4x+3) + 4x\cos(4x+3)\}$.

 $\boxed{ \mathbb{B}3.8.7 }$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=e^x\cos(3x+1)$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

 $\boxed{ \mathbb{B}3.8.7 }$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=e^x\cos(3x+1)$ と定める. *q* の導関数 *q'* を求めよ. $g'(x) = \frac{d}{dx} \{e^x \cos(3x+1)\} = \frac{d}{dx} e^x \cdot \cos(3x+1) + e^x \frac{d}{dx} \cos(3x+1)$ $= e^x \cos(3x+1) + e^x \{-\sin(3x+1)\} \frac{d}{dx}(3x+1)$ $= e^x \cos(3x+1) + e^x \{-\sin(3x+1)\}$ $=e^{x}\{\cos(3x+1)-3\sin(3x+1)\}$.

例 変数 x の関数 $y=rac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $rac{dy}{dx}$ を求める.

$$\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3} \cdot 2 = 2e^{2x-3} .$$

例 変数 x の関数 $y=\frac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める.

例 変数 x の関数 $y=\frac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める. $\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3} \cdot 2 = 2e^{2x-3} .$ よって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{e^{2x-3}}{x^3} = \frac{\frac{d}{dx} e^{2x-3} \cdot x^3 - e^{2x-3} \cdot \frac{d}{dx} x^3}{(x^3)^2}$$
$$= \frac{2e^{2x-3} \cdot x^3 - e^{2x-3} \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2xe^{2x-3} - 3e^{2x-3}}{x^4}$$

$$= \frac{x^6}{x^4} = \frac{e^{2x-3}(2x-3)}{x^4} .$$

$$= \frac{e^{2x-3}(2x-3)}{x^4} \ .$$

問3.8.8 変数 t の関数 $x=\frac{\sin t}{e^{3t-5}}$ の導関数 $\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

問3.8.8 変数
$$t$$
 の関数 $x = \frac{\sin t}{e^{3t-5}}$ の導関数 $\frac{dx}{dt}$ を求めよ.
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{e^{3t-5}} = \frac{\frac{d}{dt} \sin t \cdot e^{3t-5} - \sin t \cdot \frac{d}{dt} e^{3t-5}}{(e^{3t-5})^2}$$
$$= \frac{\cos t \cdot e^{3t-5} - \sin t \cdot e^{3t-5} \frac{d}{dt} (3t-5)}{(e^{3t-5})^2} = \frac{\cos t - \sin t \cdot 3}{e^{3t-5}}$$

終

 $=\frac{\cos t - 3\sin t}{c^{3t-5}} \ .$