3.9　第２次導関数

関数 f が微分可能で，更にその導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第 2 次導関数といい，f'' と書き表す.

関数 f が微分可能で，更にその導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第 2 次導関数といい，f'' と書き表す．つまり，f の第 2 次導関数の値 $f''(x)$ は，$f(x)$ を微分した結果 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} .$$

　関数 f が微分可能で，更にその導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第 2 次導関数といい，f'' と書き表す．つまり，f の第 2 次導関数の値 $f''(x)$ は，$f(x)$ を微分した結果 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} .$$

$f''(x)$ を $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ とも書き表す．

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} .$$

変数 x, y について $y = f(x)$ のとき，$f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x)$ を $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, y'' なども書き表す；

変数 x, y について $y = f(x)$ のとき，$f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ を $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'' などとも書き表す；$\frac{d^2y}{dx^2}$ は，y を微分した結果 $\frac{dy}{dx}$ をもう一度微分した結果である：

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3 \ .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める．f の第 2 次導関数 f'' を求める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3 \ .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 8x + 3) = 6x - 8 \ .$$

終

$\boxed{問 3.9.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求めよ.

$\boxed{\text{問}3.9.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求めよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2} = \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} .$$

問3.9.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+3x-7}{2}$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求めよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3-5x^2+3x-7}{2} = \frac{3x^2-10x+3}{2} \ .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x^2-10x+3}{2} = \frac{6x-10}{2} = 3x-5 \ .$$

終

例 変数 x の関数 $y = x^3 \ln x$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = x^3 \ln x$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1) \ .$$

例 変数 x の関数 $y=x^3\ln x$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3\ln x) = 3x^2\ln x + x^3\frac{1}{x} = x^2(3\ln x+1)\ .$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\{x^2(3\ln x+1)\} \\ &= \frac{d}{dx}x^2\cdot(3\ln x+1) + x^2\cdot\frac{d}{dx}(3\ln x+1) \\ &= 2x\cdot(3\ln x+1)+x^2\cdot 3\frac{1}{x} = 2x(3\ln x+1)+3x \\ &= x(6\ln x+5)\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}3.9.2}$ 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を求めよ.

$\boxed{問 3.9.2}$ 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2 e^t) = \frac{d}{dt}t^2 \cdot e^t + t^2 \frac{d}{dt}e^t = 2te^t + t^2 e^t \\ &= e^t(t^2 + 2t) \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}3.9.2}$ 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を求めよ.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 e^t) = \frac{d}{dt}t^2 \cdot e^t + t^2 \frac{d}{dt}e^t = 2te^t + t^2 e^t$$
$$= e^t(t^2 + 2t) \ .$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\{e^t(t^2+2t)\} = \frac{d}{dt}e^t \cdot (t^2+2t) + e^t \frac{d}{dt}(t^2+2t)$$
$$= e^t(t^2+2t) + e^t(2t+2)$$
$$= e^t(t^2+4t+2) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を求める.

$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を求める.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\sin 3t = \cos 3t \cdot \frac{d}{dt}(3t) = 3\cos 3t \ .$$

例 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を求める.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\sin 3t = \cos 3t \cdot \frac{d}{dt}(3t) = 3\cos 3t \ .$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(3\cos 3t) = 3(-\sin 3t)\frac{d}{dt}(3t) = -9\sin 3t \ .$$

終

$\boxed{問3.9.3}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x+3)$ と定める．g の第 2 次導関数 g'' を求めよ．

$\boxed{問 3.9.3}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x+3)$ と定める．g の第 2 次導関数 g'' を求めよ．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\cos(2x+3) = -\sin(2x+3)\cdot\frac{d}{dx}(2x+3)$$
$$= -2\sin(2x+3)\ .$$

$\boxed{問3.9.3}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x+3)$ と定める．g の第 2 次導関数 g'' を求めよ．

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}\cos(2x+3) = -\sin(2x+3)\cdot\frac{d}{dx}(2x+3) \\
&= -2\sin(2x+3)\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{d}{dx}\{-2\sin(2x+3)\} = -2\cos(2x+3)\cdot\frac{d}{dx}(2x+3) \\
&= -4\cos(2x+3)\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$