4.1 関数の極限

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

∞ と $-\infty$ とは実数ではない．

また，

∞ 及び $-\infty$ に対する四則演算は原則的にできない．

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

∞ と $-\infty$ とは実数ではない．

また，

∞ 及び $-\infty$ に対する四則演算は原則的にできない．

大小関係については，∞ はどんな実数よりも大きく，$-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束する．つまり，任意の実数 x に対して $-\infty < x < \infty$ ．

変数 x について，例えば

$$x = 54\ ,\quad x = 645\ ,\quad x = 7645\ ,\quad x = 87564\ ,\quad x = 986754\ ,\quad \cdots$$

のように，x の値を限りなく大きくしていくことを $x \to \infty$ と書き表す.

変数 x について，例えば

$$x = 54 \ , \quad x = 645 \ , \quad x = 7645 \ , \quad x = 87564 \ , \quad x = 986754 \ , \quad \cdots$$

のように，x の値を限りなく大きくしていくことを $x \to \infty$ と書き表す．また，例えば

$$x = -54 \ , \quad x = -645 \ , \quad x = -7564 \ , \quad x = -86745 \ , \quad x = -978456 \ , \quad \cdots$$

のように，$x < 0$ として x の絶対値 $|x|$ の値を限りなく大きくしていくことを $x \to -\infty$ と書き表す．

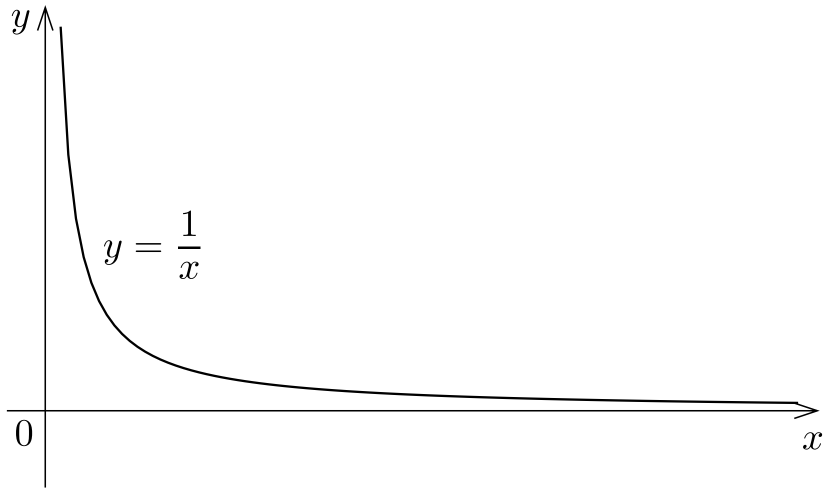
$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\frac{1}{x}$ ($x > 0$) について，x の値を大きくしていくと，例えば次のようになる：

$$\frac{1}{10} = 0.1 \ , \quad \frac{1}{100} = 0.01 \ , \quad \frac{1}{1000} = 0.001 \ , \quad \frac{1}{10000} = 0.0001 \ , \quad \cdots \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{1}{x}$ ($x > 0$) について，x の値を大きくしていくと，例えば次のようになる：

$$\frac{1}{10} = 0.1\ , \quad \frac{1}{100} = 0.01\ , \quad \frac{1}{1000} = 0.001\ , \quad \frac{1}{10000} = 0.0001\ , \quad \cdots\ .$$

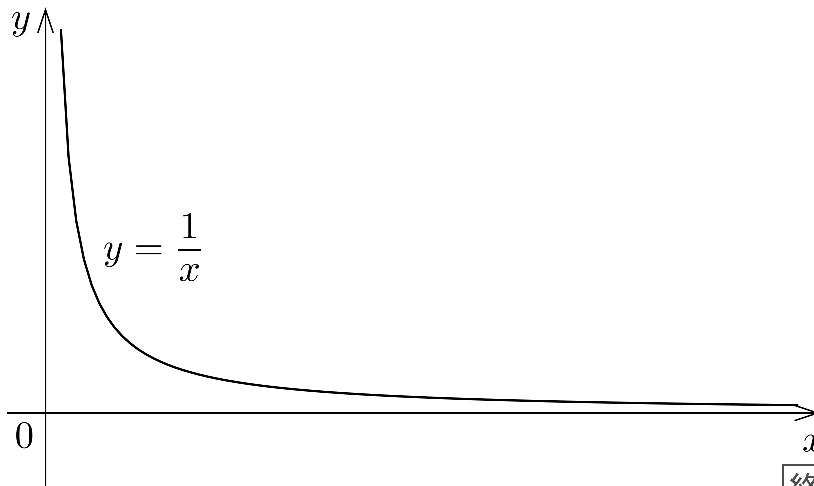
変数 x の値を限りなく大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づく.



例 変数 x の関数 $\frac{1}{x}$ ($x>0$) について，x の値を大きくしていくと，例えば次のようになる：

$$\frac{1}{10}=0.1\ ,\quad \frac{1}{100}=0.01\ ,\quad \frac{1}{1000}=0.001\ ,\quad \frac{1}{10000}=0.0001\ ,\quad \cdots\ .$$

変数 x の値を限りなく大きくしていくと $\frac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づく．このことを，$x\to\infty$ のとき $\frac{1}{x}$ は 0 に収束するといい，$x\to\infty$ のとき $\frac{1}{x}$ が限りなく近づいていく定数 0 を $\frac{1}{x}$ の極限値という．



終

一般的に述べる．変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x>K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x\to\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．

一般的に述べる．変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \ .$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

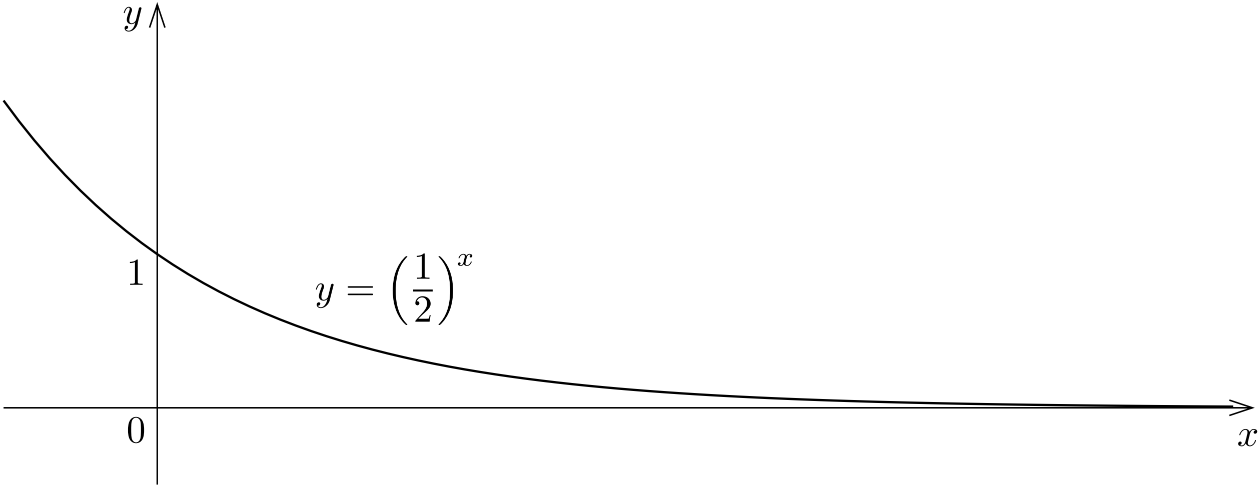
$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \to \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \ .$$

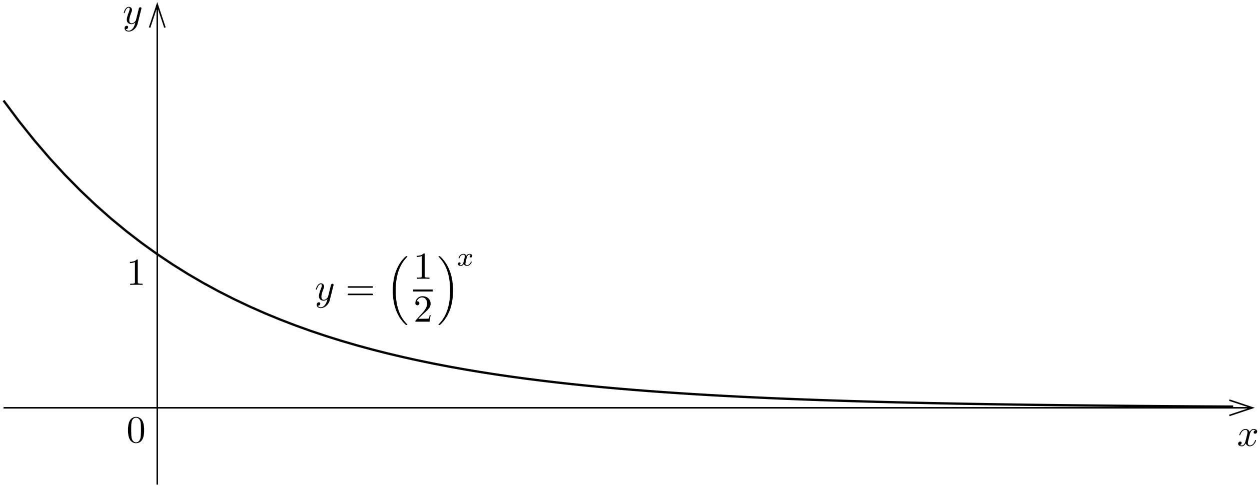
関数 $f(x)$ について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は発散するという．

例



変数 x の指数関数 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $x \to \infty$ のとき　に収束する: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \quad .$

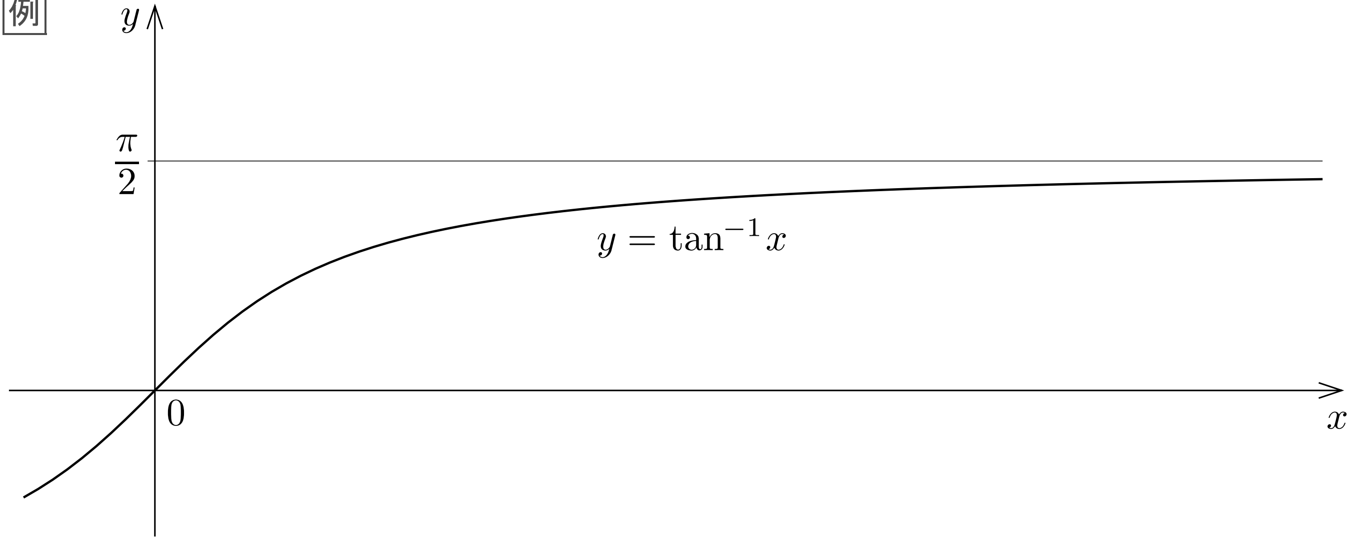
例



変数 x の指数関数 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

終

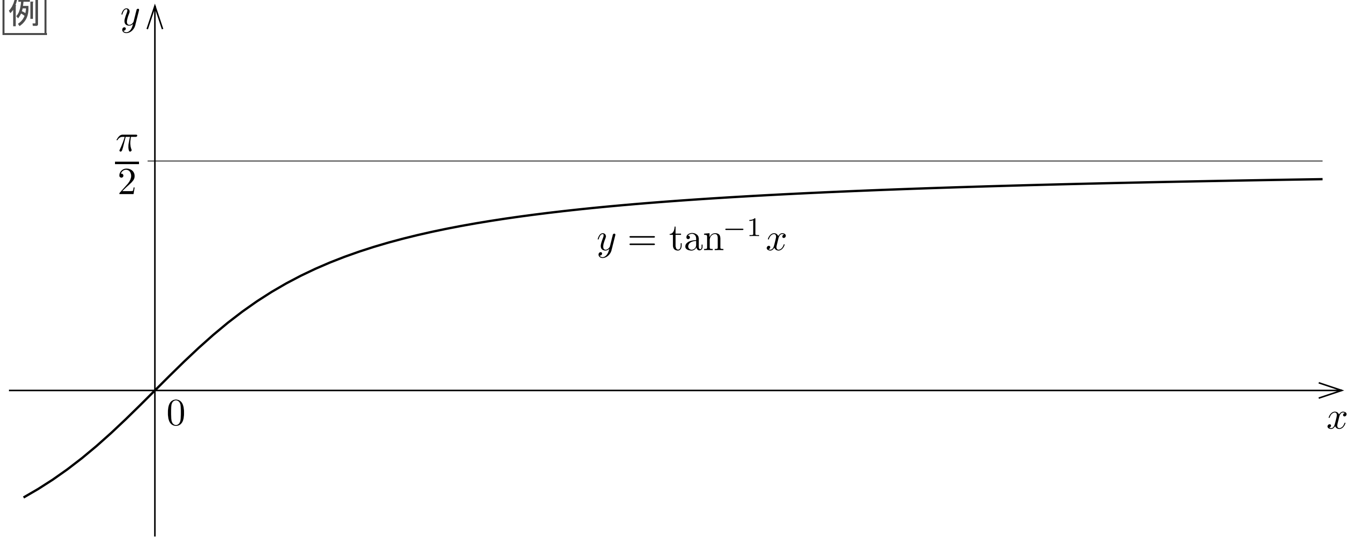
例



変数 x の逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は $x \to \infty$ のとき　　に収束する：

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \qquad .$$

例



変数 x の逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は $x \to \infty$ のとき $\frac{\pi}{2}$ に収束する：

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} \ .$$

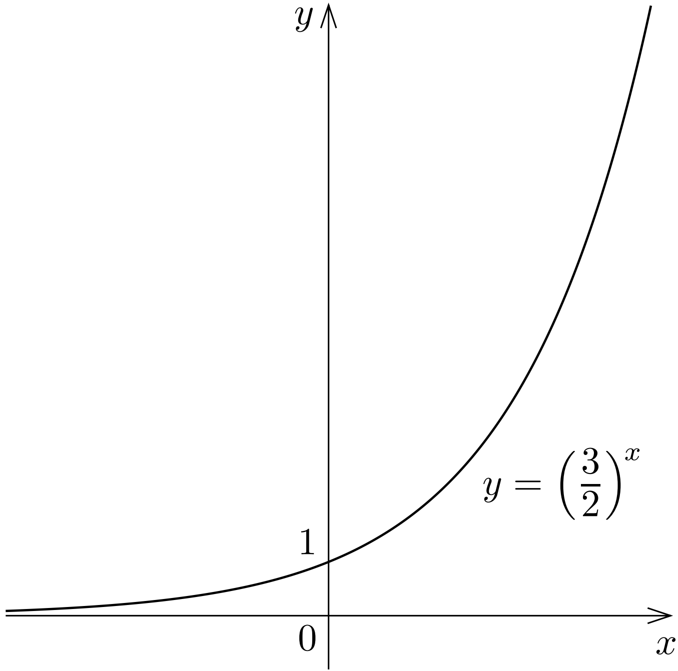
終

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．

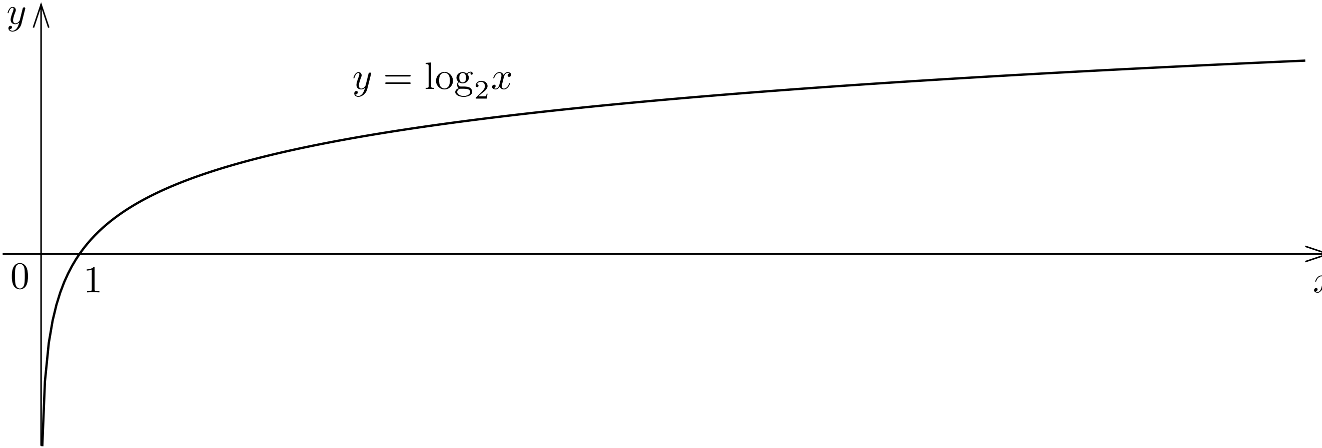
例



変数 x の指数関数 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ は $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$.

終

例



変数 x の対数関数 $\log_2 x$ は $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する:

$$\lim_{x\to\infty} \log_2 x = \infty \ .$$

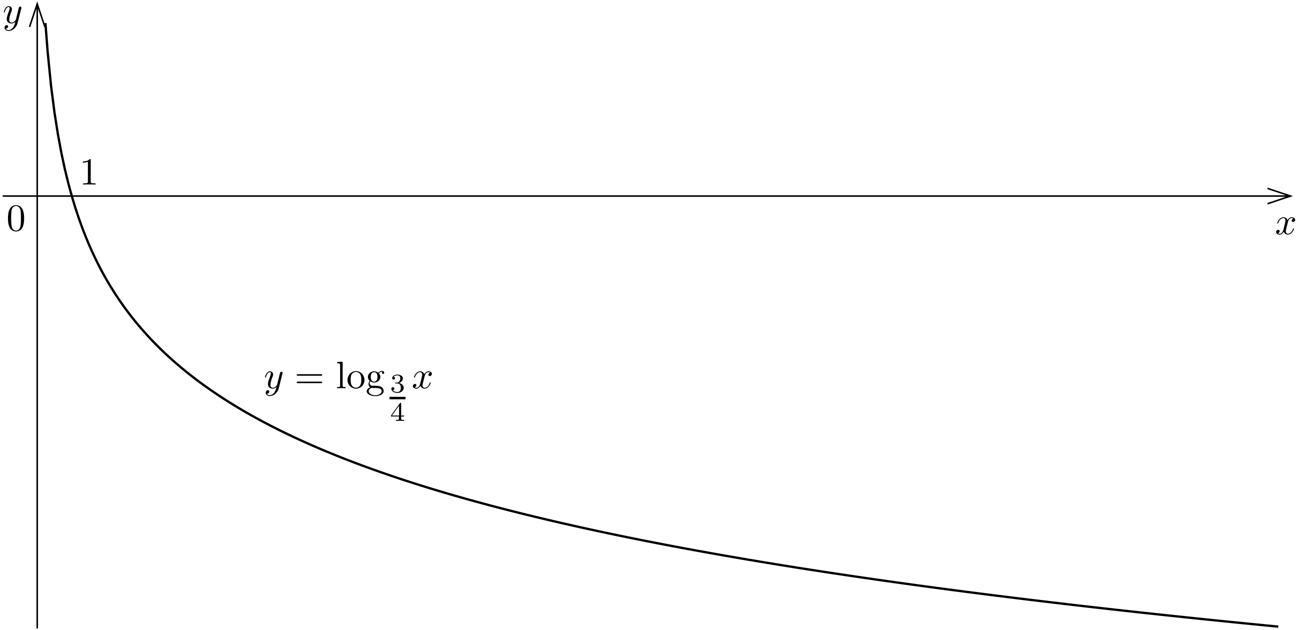
終

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

例



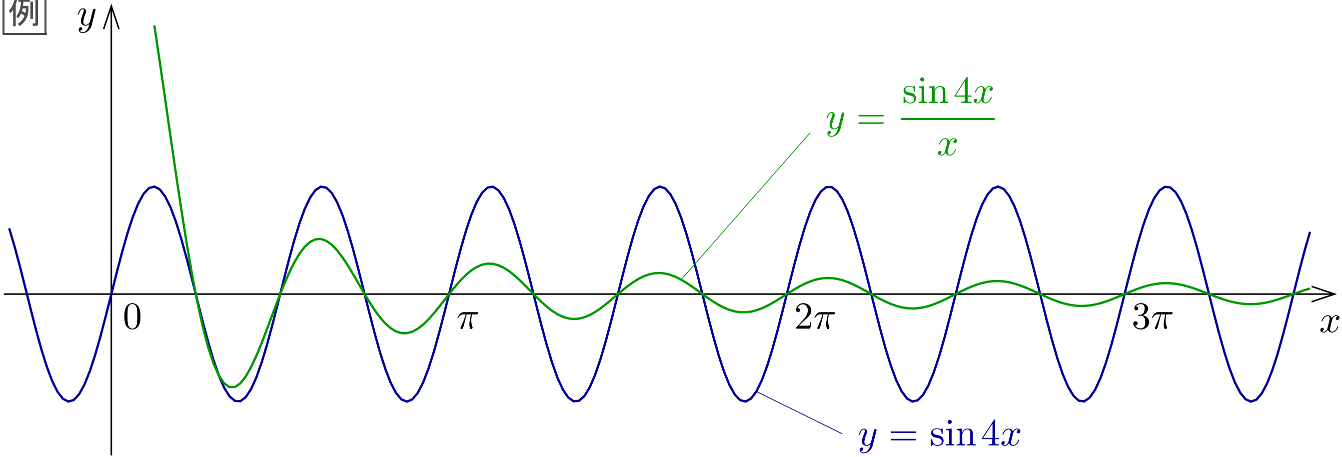
変数 x の対数関数 $\log_{\frac{3}{4}} x$ は $x \to \infty$ のとき $-\infty$ に発散する:

$$\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{3}{4}} x = -\infty \ .$$

終

変数 x の関数 $f(x)$ について，$x \to \infty$ のとき，$f(x)$ が収束しないし ∞ にも $-\infty$ にも発散しないこともある．

例



関数 $\sin 4x$ は，$x \to \infty$ のとき，収束しないし，$\lim_{x\to\infty} \sin 4x = \infty$ でも $\lim_{x\to\infty} \sin 4x = -\infty$ でもない．また，$x \to \infty$ のとき，$\dfrac{\sin 4x}{x}$ は 0 に収束する．

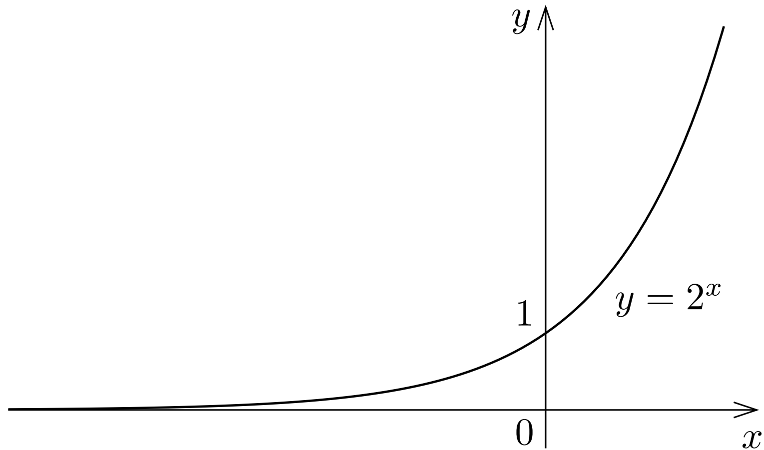
終

関数の極限について次のように分類される：

$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限値がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限値が無い} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{cases} \end{cases} .$$

例 指数関数 2^x について，

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5 \ , \quad 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125 \ , \quad 2^{-10} = \frac{1}{1024} \fallingdotseq 0.0009766 \ , \quad \cdots$$

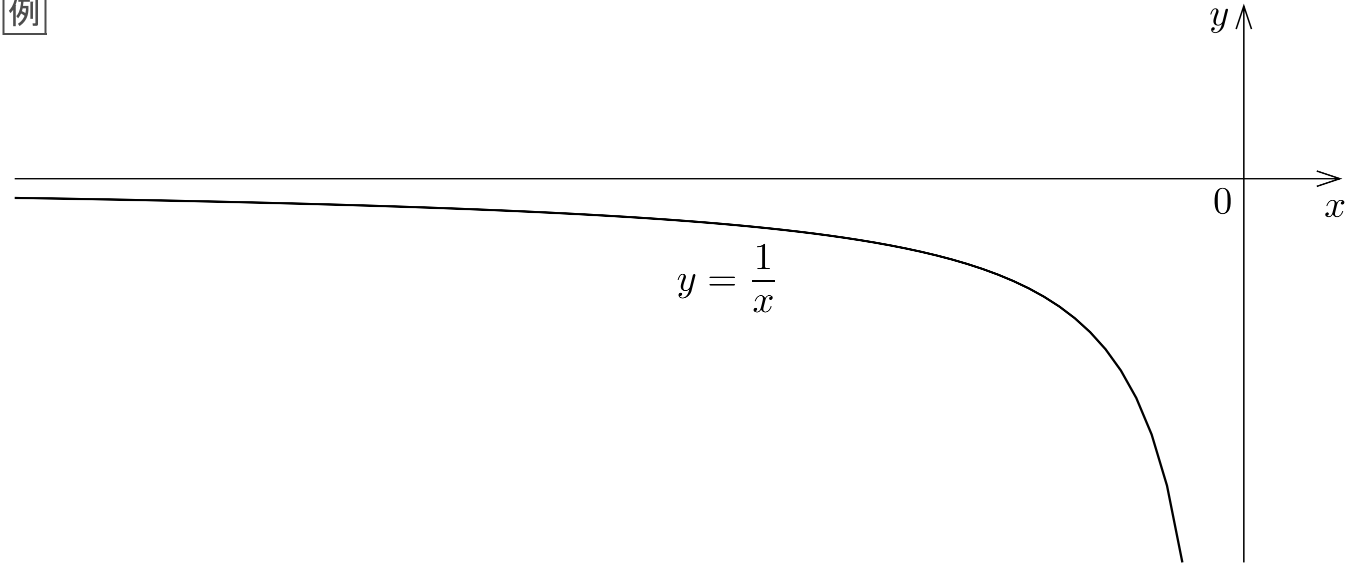


このように，$x \to -\infty$ のとき 2^x の値は 0 に限りなく近づく．このようなとき，$x \to -\infty$ のときの 2^x は 0 に収束するという． 終

一般的に，変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づくならば，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という；この極限（値）を $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

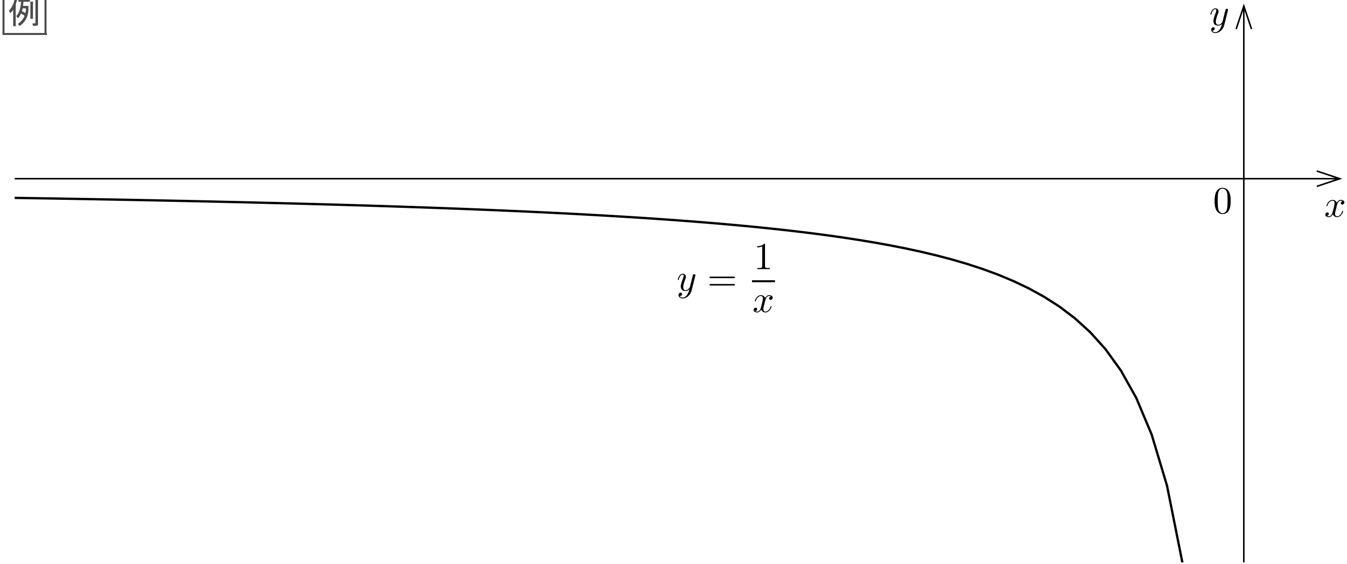
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

例



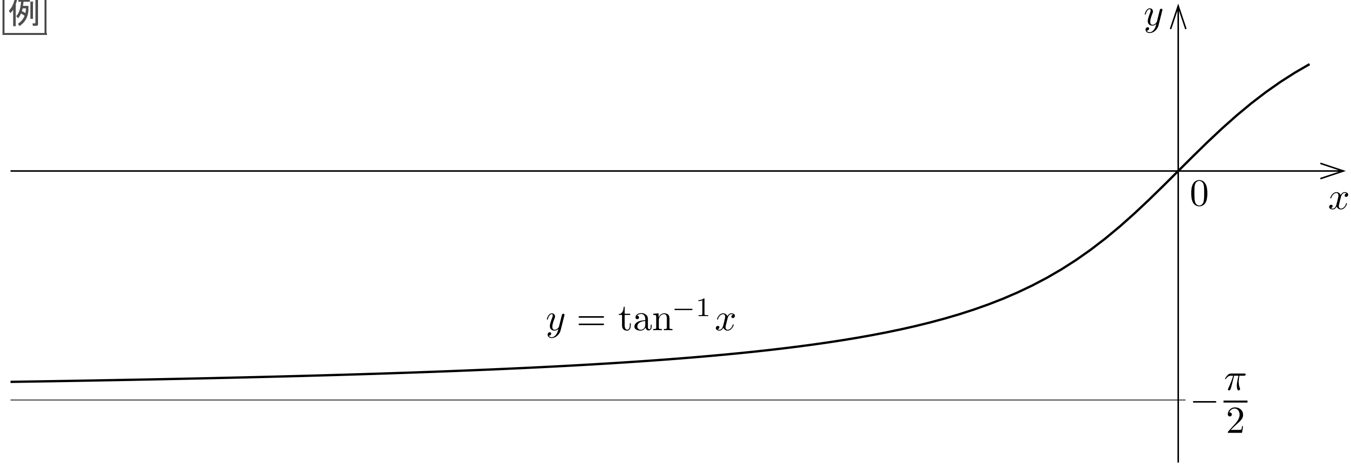
変数 x の反比例 $\dfrac{1}{x}$ は $x \to -\infty$ のとき　に収束する：$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \quad$.

例



変数 x の反比例 $\dfrac{1}{x}$ は $x \to -\infty$ のとき 0 に収束する： $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ． 終

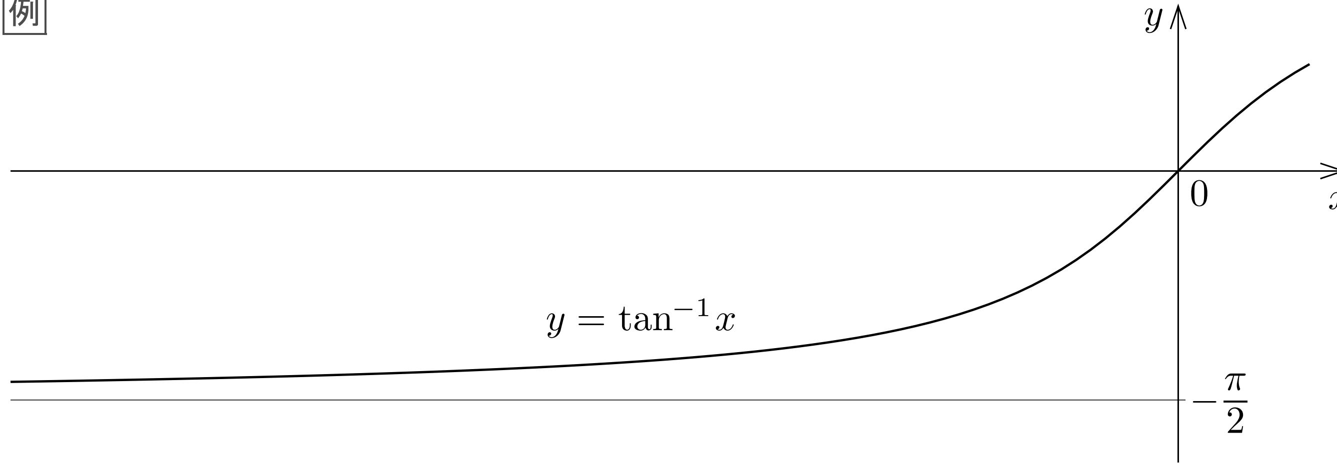
例



変数 x の逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は $x \to -\infty$ のとき　　に収束する:

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = \qquad .$$

例



変数 x の逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は $x \to -\infty$ のとき $-\frac{\pi}{2}$ に収束する：

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \ .$$

終

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x<K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

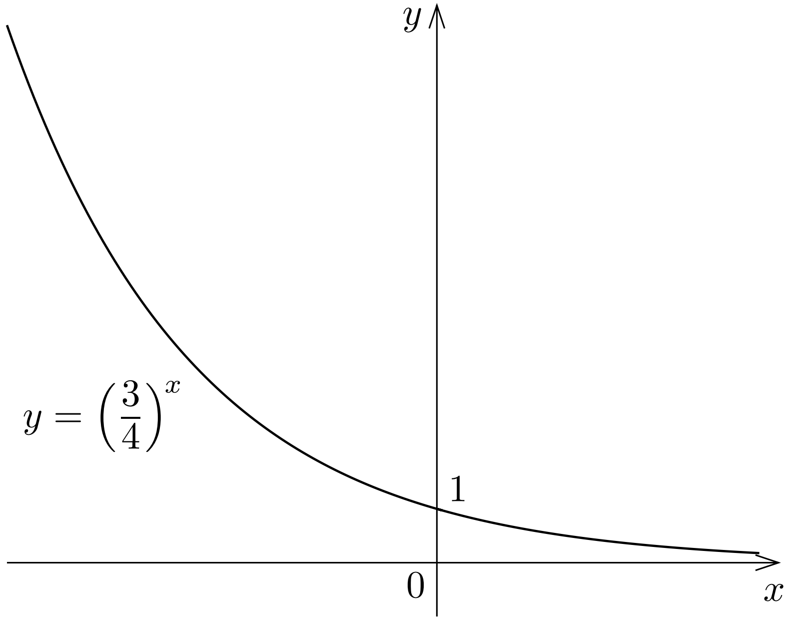
と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

例

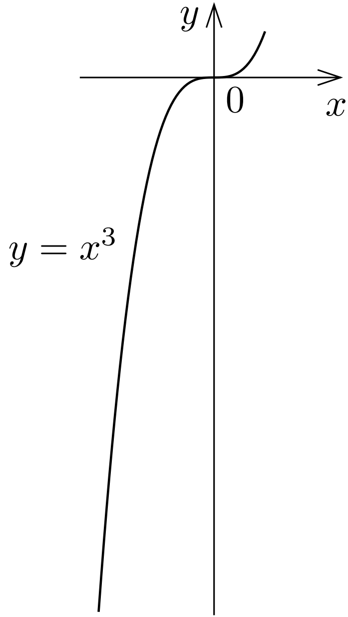


変数 x の指数関数 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ は $x\to-\infty$ のとき ∞ に発散する:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=\infty \ .$$

終

例

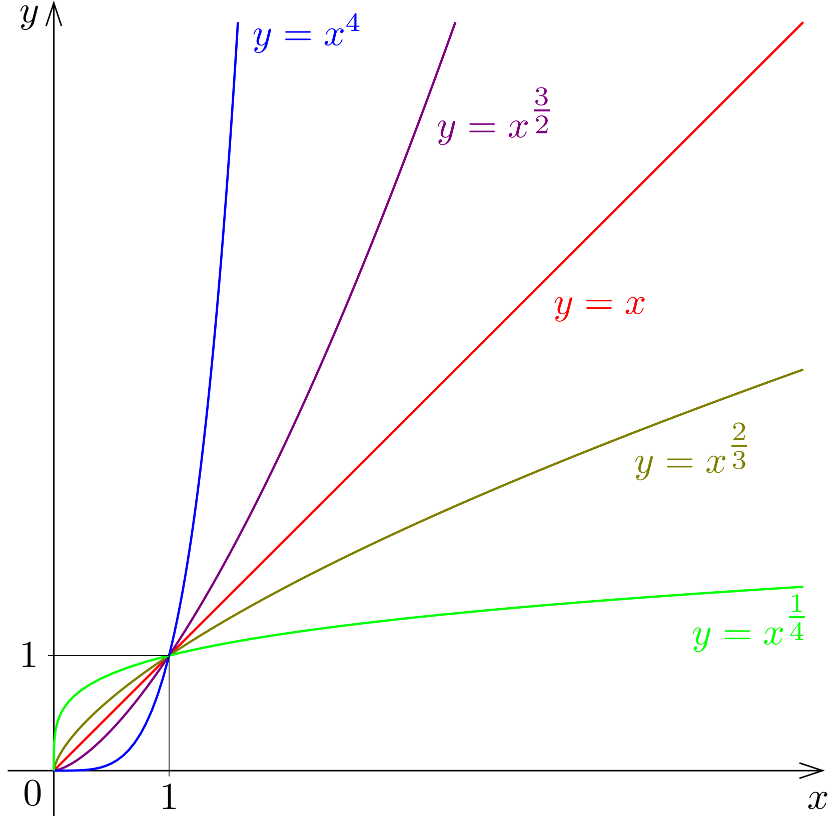


変数 x の冪関数 x^3 は $x \to -\infty$ のとき $-\infty$ に発散する： $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ ．

終

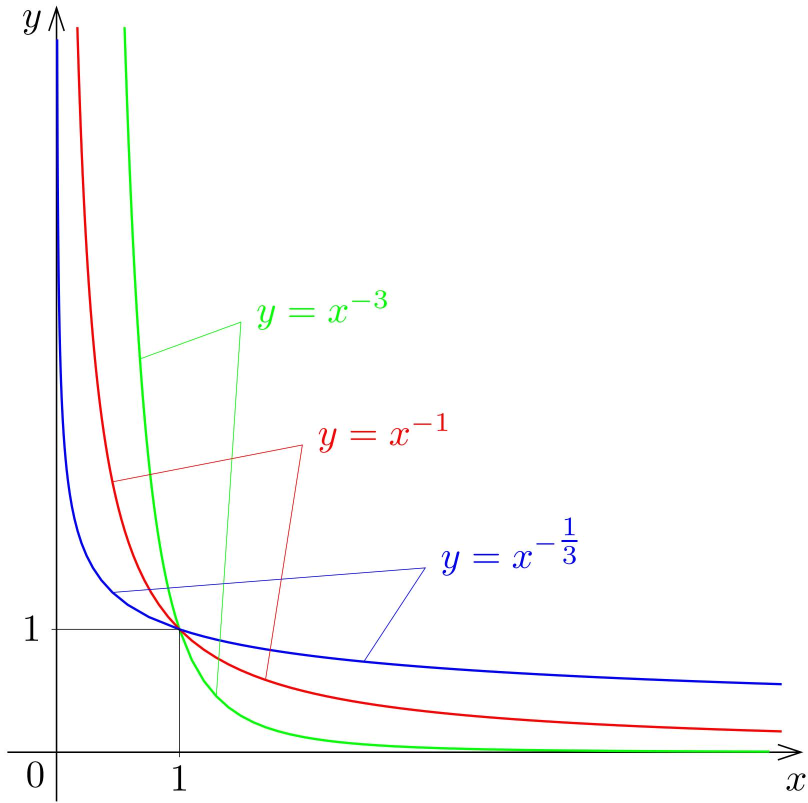
定数 p について $p>0$ とする．変数 x の冪関数 x^p は $x\to\infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty\ .$$



定数 p について $p<0$ とする．変数 x の冪関数 x^p は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する：

$$\lim_{x\to\infty} x^p = 0 \ .$$



定理　定数 p について $p \neq 0$ とする． p を指数とする冪関数 x^p （ $x > 0$ ）について，

$$p > 0 \text{ のとき } \lim_{x \to \infty} x^p = \infty \ , \qquad p < 0 \text{ のとき } \lim_{x \to \infty} x^p = 0 \ .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{9}{5}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{15}} = \infty \ .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{9}{5}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{15}} = \infty \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{7}{8}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{8}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{11}{24}} = 0 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.1.1}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} x \qquad = \lim_{x\to\infty} x \qquad = \qquad .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} x \qquad = \lim_{x\to\infty} x \qquad = \qquad .$$

$\boxed{問4.1.1}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{9}{4}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{3}-\frac{9}{4}} = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{7}{12}} = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{8}{5}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{4}-\frac{8}{5}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{20}} = \infty \ .$$

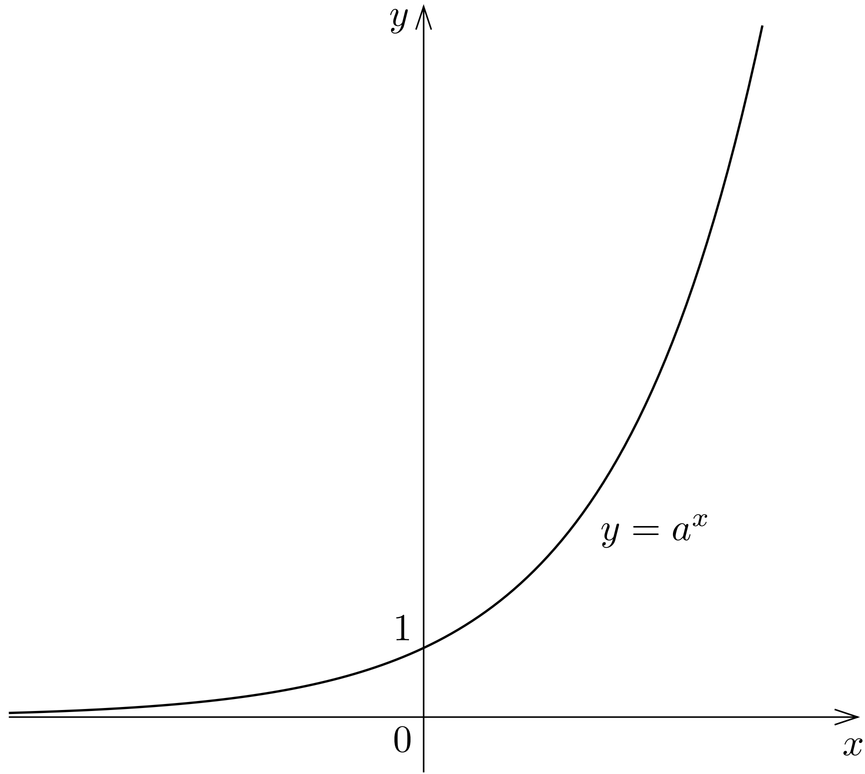
$\boxed{終}$

　定数 a について $a>1$ とする．変数 x の指数関数 a^x は $x\to\infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty .$$

変数 x の指数関数 a^x は $x\to-\infty$ のとき 0 に収束する：

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 .$$

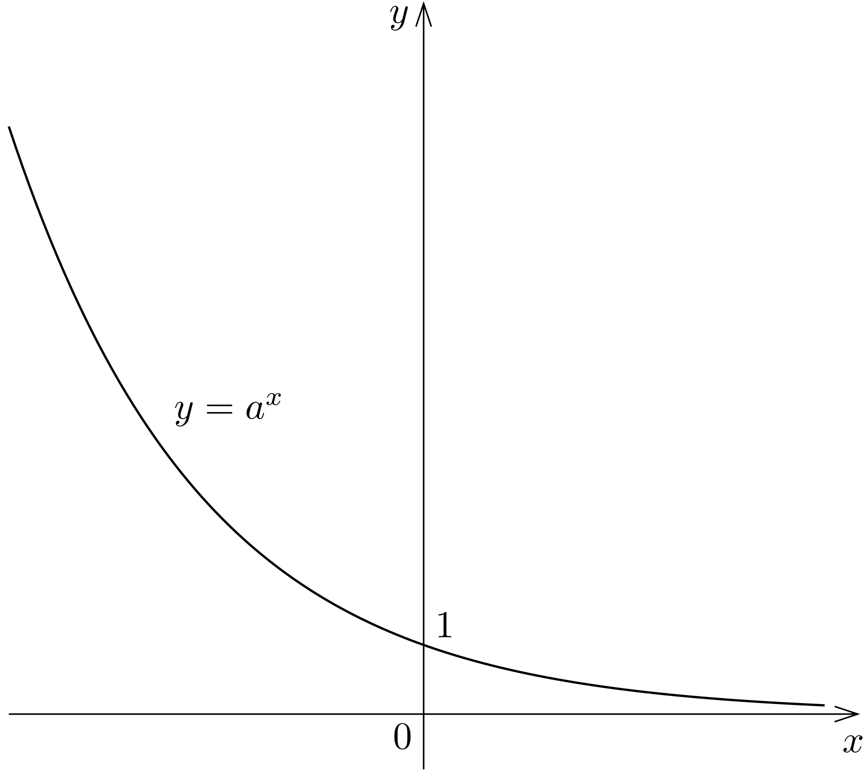


定数 a について $0 < a < 1$ とする．変数 x の指数関数 a^x は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する：

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0 \ .$$

変数 x の指数関数 a^x は $x \to -\infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \ .$$



定理　定数 a について $a>0$, $a \neq 1$ とする. a を底とする指数関数 a^x について,

$$a>1 \text{ のとき,} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \ ;$$
$$0<a<1 \text{ のとき,} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{4^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{4^x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

指数法則より $\dfrac{5^x}{4^x} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$. $\dfrac{5}{4} > 1$ なので,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = \infty \ , \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = 0 \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{6^x}{7^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．

例 変数 x の関数 $\dfrac{6^x}{7^x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

指数法則より $\dfrac{6^x}{7^x} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^x$. $0 < \dfrac{6}{7} < 1$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^x = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^x = \infty \ .$$

終

$\boxed{問 4.1.2}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \qquad .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.1.2}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.1.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x}{3^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \qquad .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \qquad .$$

$\boxed{問 4.1.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x}{3^x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

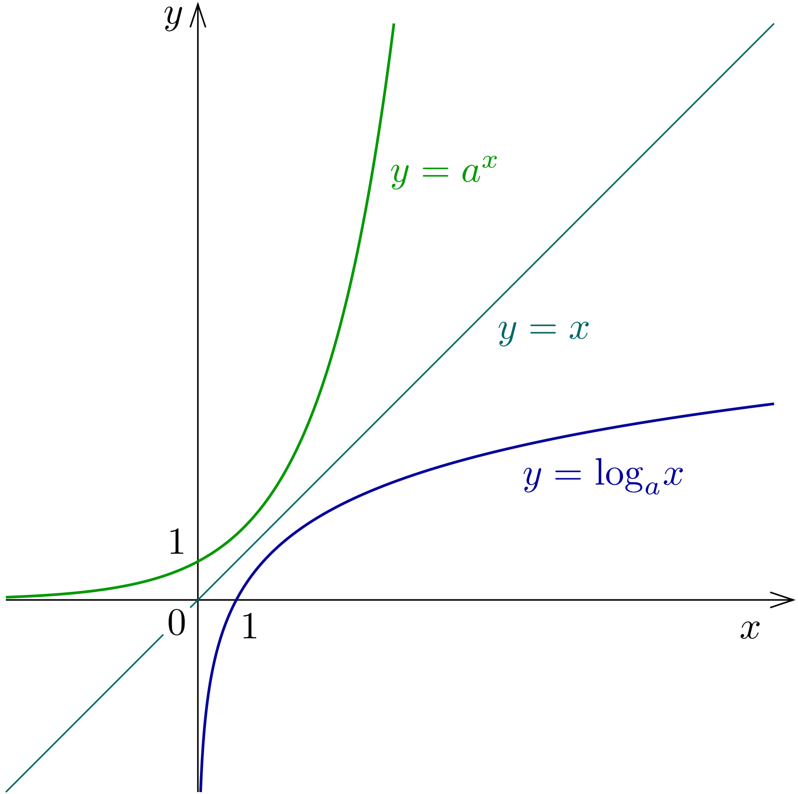
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty \ .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = 0 \ .$$

$\boxed{終}$

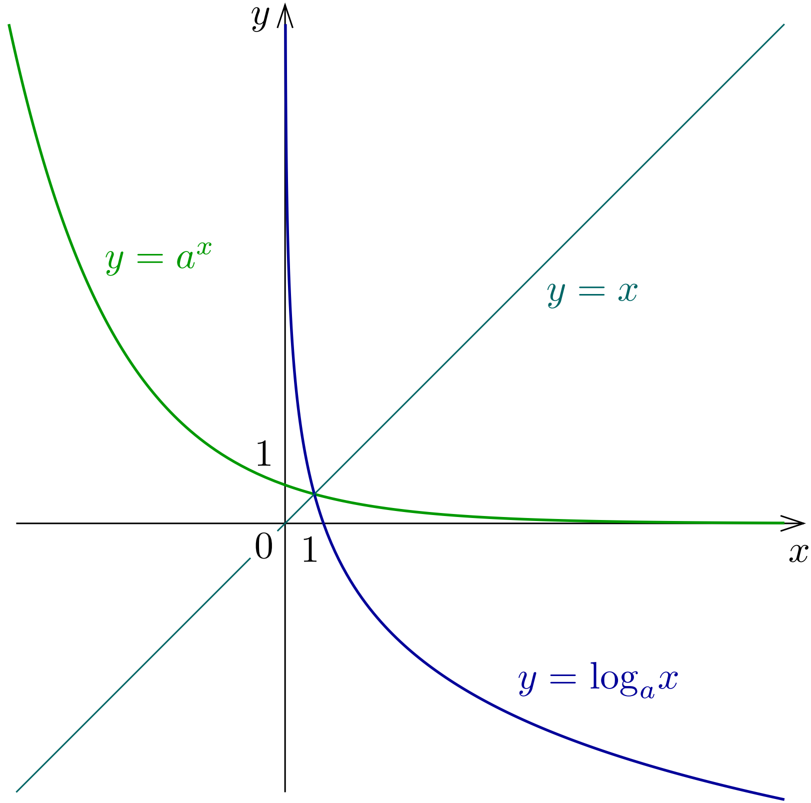
定数 a について $a > 1$ とする．変数 x の対数関数 $\log_a x$ は $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty \ .$$



定数 a について $0<a<1$ とする．変数 x の対数関数 $\log_a x$ は $x\to\infty$ のとき $-\infty$ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty\ .$$



定理　定数 a について $a>0$, $a \neq 1$ とする. a を底とする対数関数 $\log_a x$ ($x>0$) について,

$a>1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$,　 $0<a<1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$.