

## 4.2 関数の極限の性質

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x$  の値を限りなく大きくすると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）といふ。

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x$  の値を限りなく大きくすると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといい、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）という。 $x \rightarrow \infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x$  の値を限りなく大きくすると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといい、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）という。 $x \rightarrow \infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

関数  $f$  について、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$  は発散するという。

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について, どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について, どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について, 変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと  $f(x)$  の値も限りなく大きくなるとき,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は正の無限大に発散するといひ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと  $f(x)$  の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$  でその絶対値  $|f(x)|$  が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は負の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  について  $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づくとき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといい、 $c$  を  $f(x)$  の極限(値)という.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  について  $x \rightarrow -\infty$  とすると  
 $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく  
とき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといい、 $c$  を  $f(x)$  の極限  
(値) という。  $x \rightarrow -\infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c .$$

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  について  $x \rightarrow -\infty$  とすると  
 $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく  
とき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといい、 $c$  を  $f(x)$  の極限  
(値) という。  $x \rightarrow -\infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c .$$

関数  $f$  について、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$  は発散するという。

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について, どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、 $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f(x)$  の値が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする。

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、 $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f(x)$  の値が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す。

変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、 $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f(x) < 0$  でその絶対値  $|f(x)|$  が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は負の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す。

関数の極限について次のように分類される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限值がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限值が無い} = \text{発散する} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{array} \right. .$$

**定理** 定数  $a$  は実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} ;$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  と  $g(x)$  とが収束して  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} .$$

**定理** 定数  $a$  は実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} ;$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  と  $g(x)$  とが収束して  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} .$$

次のことがいえる: 変数  $x$  と無関係な定数  $k$  について,  $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$  なので, 関数  $f(x)$  について  $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) + k\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + \lim_{x \rightarrow \infty} k = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + k ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{k f(x)\} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} k \right) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) .$$

**定理** 関数  $f(x)$  と関数  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  があるとする. 定数  $a$  は実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は収束してかつ極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  において関数  $g$  が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) .$$

**定理** 関数  $f(x)$  と関数  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  があるとする. 定数  $a$  は実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は収束してかつ極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  において関数  $g$  が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) .$$

**定理** 定数  $a$  と  $b$  とは実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  と変数  $y$  の関数  $g(y)$  とについて,  $f(x) = g(y)$  で,  $x \rightarrow a$  のとき  $y \rightarrow b$ ,  $y \neq b$  とする.  $y \rightarrow b$  のとき  $g(y)$  が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

関数  $f$  について  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  とする.  $y = f(x)$  とおくと,  $x \rightarrow a$  のとき  $y \rightarrow \infty$  ; よって, 定数  $k$  に対して,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0 .$$

関数  $f$  について  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  とする.  $y = f(x)$  とおくと,  $x \rightarrow a$  のとき  $y \rightarrow \infty$  ; よって, 定数  $k$  に対して,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0 .$$

関数  $f$  について  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  とする.  $y = -f(x)$  とおくと,  $f(x) = -y$  ,  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x) \rightarrow -\infty$  なので  $y = -f(x) \rightarrow \infty$  ; よって, 定数  $k$  に対して,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{-y} = -k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = -k \cdot 0 = 0 .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

**例** 変数  $x$  の関数  $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^{-2}) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{5}{x^2} \right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9 .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^{-2}) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{5}{x^2} \right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9 .$$

9 において関数  $\sqrt{x}$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{5}{x^2} \right)} .$$

関数  $f(x)$  と関数  $g(x)$  との合成関数  $g(f(x))$  があるとする. 定数  $a$  は実数か  $\infty$  か  $-\infty$  とする. 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が収束してかつ極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  において関数  $g$  が連続であるならば,  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$  .

**例** 変数  $x$  の関数  $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^{-2}) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{5}{x^2} \right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9 .$$

9 において関数  $\sqrt{x}$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{5}{x^2} \right)} = \sqrt{9} = 3 .$$

**終**

**問4.2.1** 変数  $x$  の関数  $\log_3\left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right)$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を

調べよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81 + \quad = \quad .$$

において関数  $\log_3 x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) &= \log_3 \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) \right\} = \log_3 \quad = \log_3 3 \\ &= \quad . \end{aligned}$$

**問4.2.1** 変数  $x$  の関数  $\log_3\left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right)$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81 + 0 = 81 .$$

81 において関数  $\log_3 x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) &= \log_3 \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) \right\} = \log_3 81 = \log_3 3^4 \\ &= 4 . \end{aligned}$$

終

**例** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

**例** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$y = 2x - 5$  とおく.  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^y$ .  $x \rightarrow \infty$  のとき  $y = 2x - 5 \rightarrow \infty$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = \infty .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる。

$y = 2x - 5$  とおく。  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^y$  .  $x \rightarrow \infty$  のとき  $y = 2x - 5 \rightarrow \infty$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = \infty .$$

$x \rightarrow -\infty$  のとき  $y = 2x - 5 \rightarrow -\infty$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = 0 .$$

**終**

**問4.2.2** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの及び  $x \rightarrow -\infty$

のときの極限を調べよ.

$y = 3x - 7$  とおく.  $x \rightarrow \infty$  のとき  $y \rightarrow$       なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \quad .$$

$x \rightarrow -\infty$  のとき  $y \rightarrow$       なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \quad .$$

**問4.2.2** 変数  $x$  の関数  $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの及び  $x \rightarrow -\infty$

のときの極限を調べよ.

$y = 3x - 7$  とおく.  $x \rightarrow \infty$  のとき  $y \rightarrow \infty$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = 0 .$$

$x \rightarrow -\infty$  のとき  $y \rightarrow -\infty$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \infty .$$

終

**問4.2.3** 変数  $y$  の関数  $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$  について,  $y \rightarrow \infty$  のとき及び  $y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$x = 5 - 2y$  とおく.  $y \rightarrow \infty$  のとき  $x \rightarrow$                       なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \quad .$$

$y \rightarrow -\infty$  のとき  $x \rightarrow$                       なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \quad .$$

**問4.2.3** 変数  $y$  の関数  $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$  について,  $y \rightarrow \infty$  のとき及び  $y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$x = 5 - 2y$  とおく.  $y \rightarrow \infty$  のとき  $x \rightarrow -\infty$  なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^x = 0 .$$

$y \rightarrow -\infty$  のとき  $x \rightarrow \infty$  なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \infty .$$

終

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について,  $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について,  $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \quad \text{なので}$$

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について,  $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ;$$

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について、 $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数  $\sin x$  は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について、 $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数  $\sin x$  は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = \quad \text{なので}$$

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について、 $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数  $\sin x$  は連続なので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} ;$$

**例** 変数  $t$  の関数  $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$  について、 $t \rightarrow \infty$  のとき及び  $t \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数  $\sin x$  は連続なので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} ;$$

$-\frac{\pi}{6}$  において正弦関数  $\sin x$  は連続なので、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} .$$

**終**

**問4.2.4** 変数  $y$  の関数  $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$  について,  $y \rightarrow \infty$  のとき及び

$y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1}y =$        なので,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$        $=$       ;      において余

弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos = .$$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}y =$        なので,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$        $=$       ;      に  
おいて余弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\quad\quad\quad\right) \\ = .$$

**問4.2.4** 変数  $y$  の関数  $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$  について,  $y \rightarrow \infty$  のとき及び

$y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので,} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} \quad \text{において余}$$

弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} .$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}y = \quad \text{なので,} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \quad = \quad ; \quad \text{に}$$

において余弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\quad\right)$$

$$= \quad .$$

問4.2.4 変数  $y$  の関数  $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$  について,  $y \rightarrow \infty$  のとき及び

$y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$  なので,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$  ;  $\frac{2\pi}{3}$  において余弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}y = -\frac{\pi}{2}$  なので,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$  ;  $-\frac{2\pi}{3}$  において余弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) &= \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

終

例 変数  $x$  の関数  $x \sin \frac{2}{x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $x \sin \frac{2}{x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = \frac{2}{x}$  とおく.  $x = \frac{2}{y}$  なので

$$x \sin \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \sin y = 2 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

例 変数  $x$  の関数  $x \sin \frac{2}{x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = \frac{2}{x}$  とおく.  $x = \frac{2}{y}$  なので

$$x \sin \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \sin y = 2 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow \infty$  のとき  $y = \frac{2}{x} \rightarrow 0$  .  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sin \frac{2}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 2 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) = 2 \cdot 1 = 2 .$$

終

問4.2.5 変数  $y$  の関数  $y \sin \frac{3}{2y}$  について,  $y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

変数  $x$  を  $x = \frac{3}{2y}$  とおく.  $y =$                       なので

$$y \sin \frac{3}{2y} = \sin x = \frac{3}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} .$$

$y \rightarrow -\infty$  のとき  $x \rightarrow 0$  .  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left( y \sin \frac{3}{2y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 3 \cdot 1 = 3 .$$

終

問4.2.5 変数  $y$  の関数  $y \sin \frac{3}{2y}$  について,  $y \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

変数  $x$  を  $x = \frac{3}{2y}$  とおく.  $y = \frac{3}{2x}$  なので

$$y \sin \frac{3}{2y} = \frac{3}{2x} \sin x = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} .$$

$y \rightarrow -\infty$  のとき  $x \rightarrow 0$  .  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left( y \sin \frac{3}{2y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} .$$

終

定理 定数  $a$  は実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} ;$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  と  $g(x)$  とが収束して  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} .$$

定数  $a$  及び変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき関数  $f(x)$  または  $g(x)$  が発散するときはこの定理を使えない.

定数  $a$  は実数または  $\infty$  または  $-\infty$  とする. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  と  $g(x)$  について以下のことが一般的にいえる.

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  で  $x \rightarrow a$  のとき  $g(x)$  が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \infty .$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  で  $x \rightarrow a$  のとき  $g(x)$  が収束して  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > 0$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  で  $x \rightarrow a$  のとき  $g(x)$  が収束して  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) < 0$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty .$$

(4)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  かつ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  ならば,  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$  ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty .$$

例 変数  $y$  の関数  $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$  について  $y \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

**例** 変数  $y$  の関数  $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$  について  $y \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4} > 1$  より  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$  なので,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$ , よって

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\} = \infty .$$

例 変数  $y$  の関数  $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$  について  $y \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4} > 1$  より  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$  なので,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$ , よって

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\} = \infty .$$

$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$  は発散しているので  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}$  を  $2 \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y$  に変形

しないこと.  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$  は発散しているので  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\}$  を

$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} - 7$  に変形しないこと.

終

**問4.2.6** 変数  $u$  の関数  $5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8$  について,  $u \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^u = \quad \text{なので,} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8\right\} = \quad .$$

**問4.2.6** 変数  $u$  の関数  $5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8$  について,  $u \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^u = \infty \text{ なので, } \lim_{u \rightarrow -\infty} \left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8\right\} = \infty .$$

終

**問4.2.7** 変数  $y$  の関数  $\left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y$  について,  $y \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{5}{y^2} = \quad \text{なので} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) = \quad . \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \log_2 y = \quad \text{なので}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y \right\} = \quad .$$

**問4.2.7** 変数  $y$  の関数  $\left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y$  について,  $y \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{5}{y^2} = 0 \quad \text{なので} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) = -3 \quad . \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \log_2 y = \infty \quad \text{なので}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y \right\} = -\infty \quad .$$

終

**例** 変数  $x$  の関数  $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

**例** 変数  $x$  の関数  $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \infty .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty \quad \text{及び} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty \quad \text{は発散しているので}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} \quad \text{を} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x \quad \text{に変形しないこと.}$$

**終**

**問4.2.8** 変数  $x$  の関数  $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  の

ときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{6}\right)^x = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{6}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^x = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \quad.$$

**問4.2.8** 変数  $x$  の関数  $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  の

ときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \quad .$$

**問4.2.8** 変数  $x$  の関数  $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  の

ときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \quad \right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \quad \right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left( \quad \right)^x + \left( \quad \right)^x \right\} = \quad .$$

**問4.2.8** 変数  $x$  の関数  $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \infty .$$

終