

4.2 関数の極限の性質

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり、

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、 c を $f(x)$ の極限（値）といふ。

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり、

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限（値）という。 $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり、

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限（値）という。 $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

関数 f について、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$ は発散するという。

変数 x の関数 $f(x)$ について, どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について、変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について、変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について、変数 x の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり、

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \rightarrow -\infty$ とすると f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づくとき、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限(値)という.

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり、

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \rightarrow -\infty$ とすると
 f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく
とき、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限
(値) という。 $x \rightarrow -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり、

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \rightarrow -\infty$ とすると f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づくとき、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限(値)という。 $x \rightarrow -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c .$$

関数 f について、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$ は発散するという。

変数 x の関数 $f(x)$ について, どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について、 $x \rightarrow -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について、 $x \rightarrow -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について、 $x \rightarrow -\infty$ とすると $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

関数の極限について次のように分類される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限值がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限值が無い} = \text{発散する} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{array} \right. .$$

定理 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} ;$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} .$$

定理 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} ;$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} .$$

次のことがいえる: 変数 x と無関係な定数 k について, $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$ なので, 関数 $f(x)$ について $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) + k\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + \lim_{x \rightarrow \infty} k = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + k ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{k f(x)\} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} k \right) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) .$$

定理 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) .$$

定理 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) .$$

定理 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする. $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

関数 f について $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ とする. $y = f(x)$ とおくと, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow \infty$; よって, 定数 k に対して,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0 .$$

関数 f について $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ とする. $y = f(x)$ とおくと, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow \infty$; よって, 定数 k に対して,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0 .$$

関数 f について $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ とする. $y = -f(x)$ とおくと, $f(x) = -y$, $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$ なので $y = -f(x) \rightarrow \infty$; よって, 定数 k に対して,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k}{-y} = -k \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} = -k \cdot 0 = 0 .$$

例 変数 x の関数 $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^{-2}) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2} \right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9 .$$

例 変数 x の関数 $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^{-2}) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2} \right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9 .$$

9 において関数 \sqrt{x} は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2} \right)} .$$

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. 定数 a は実数か ∞ か $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ において関数 g が連続であるなら

$$\text{ば, } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) .$$

例 変数 x の関数 $\sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^{-2}) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2} \right) = 9 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 9 + 0 = 9 .$$

9 において関数 \sqrt{x} は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{5}{x^2} \right)} = \sqrt{9} = 3 .$$

終

問4.2.1 変数 x の関数 $\log_3\left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を

調べよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81 + \quad = \quad .$$

において関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) &= \log_3 \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) \right\} = \log_3 \quad = \log_3 3 \\ &= \quad . \end{aligned}$$

問4.2.1 変数 x の関数 $\log_3\left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81 + 0 = 81 .$$

81 において関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) &= \log_3 \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) \right\} = \log_3 81 = \log_3 3^4 \\ &= 4 . \end{aligned}$$

終

例 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$y = 2x - 5$ とおく. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^y$. $x \rightarrow \infty$ のとき $y = 2x - 5 \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = \infty .$$

例 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$y = 2x - 5$ とおく. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^y$. $x \rightarrow \infty$ のとき $y = 2x - 5 \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = \infty .$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $y = 2x - 5 \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = 0 .$$

終

問4.2.2 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの及び $x \rightarrow -\infty$

のときの極限を調べよ.

$y = 3x - 7$ とおく. $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \quad .$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \quad .$$

問4.2.2 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの及び $x \rightarrow -\infty$

のときの極限を調べよ.

$y = 3x - 7$ とおく. $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = 0 .$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \infty .$$

終

問4.2.3 変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$x = 5 - 2y$ とおく. $y \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \quad .$$

$y \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \quad .$$

問4.2.3 変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$x = 5 - 2y$ とおく. $y \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^x = 0 .$$

$y \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \infty .$$

終

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \quad \text{なので}$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ;$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について、 $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = \quad \text{なので}$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について、 $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} ;$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について、 $t \rightarrow \infty$ のとき及び $t \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{に}$$

において正弦関数 $\sin x$ は連続なので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} ;$$

$-\frac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} .$$

終

問4.2.4 変数 y の関数 $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び

$y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1}y =$ なので, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ $=$; において余

弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos = .$$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}y =$ なので, $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ $=$; に

おいて余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\quad\quad\quad\right)$$

$$= .$$

問4.2.4 変数 y の関数 $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び

$y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ なので, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ において余

弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}y =$ 　　　　　　なので, $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ 　　　　　　= 　　　　　　; 　　　　　　に

において余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\quad\quad\quad\right)$$

= 　　　　　　.

問4.2.4 変数 y の関数 $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について, $y \rightarrow \infty$ のとき及び

$y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ なので, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ において余

弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} .$$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}y = -\frac{\pi}{2}$ なので, $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) &= \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} . \end{aligned}$$

終

例 変数 x の関数 $x \sin \frac{2}{x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $x \sin \frac{2}{x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

変数 y を $y = \frac{2}{x}$ とおく. $x = \frac{2}{y}$ なので

$$x \sin \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \sin y = 2 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

例 変数 x の関数 $x \sin \frac{2}{x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

変数 y を $y = \frac{2}{x}$ とおく. $x = \frac{2}{y}$ なので

$$x \sin \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \sin y = 2 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $y = \frac{2}{x} \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{2}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) = 2 \cdot 1 = 2 .$$

終

問4.2.5 変数 y の関数 $y \sin \frac{3}{2y}$ について, $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 x を $x = \frac{3}{2y}$ とおく. $y =$ なので

$$y \sin \frac{3}{2y} = \sin x = \frac{3}{2y} \cdot \frac{\sin x}{x} .$$

$y \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(y \sin \frac{3}{2y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2y} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{3}{2y} \cdot 1 = \frac{3}{2y} .$$

終

問4.2.5 変数 y の関数 $y \sin \frac{3}{2y}$ について, $y \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 x を $x = \frac{3}{2y}$ とおく. $y = \frac{3}{2x}$ なので

$$y \sin \frac{3}{2y} = \frac{3}{2x} \sin x = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} .$$

$y \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(y \sin \frac{3}{2y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} .$$

終

定理 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} ;$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} .$$

定数 a 及び変数 x について $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ または $g(x)$ が発散するときはこの定理を使えない.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ について以下のことが一般的にいえる.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ で $x \rightarrow a$ のとき $g(x)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \infty .$$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ で $x \rightarrow a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ で $x \rightarrow a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) < 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty .$$

(4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ならば, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty .$$

例 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$ について $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$ について $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4} > 1$ より $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$ なので, $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$, よって

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\} = \infty .$$

例 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$ について $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4} > 1$ より $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$ なので, $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$, よって

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\} = \infty .$$

$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$ は発散しているので $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}$ を $2 \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^y$ に変形

しないこと. $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$ は発散しているので $\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\}$ を

$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} - 7$ に変形しないこと.

終

問4.2.6 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8$ について, $u \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^u = \quad \text{なので,} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8\right\} = \quad .$$

問4.2.6 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8$ について, $u \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^u = \infty \text{ なので, } \lim_{u \rightarrow -\infty} \left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8\right\} = \infty .$$

終

問4.2.7 変数 y の関数 $\left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y$ について, $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{5}{y^2} = \quad \text{なので} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) = \quad . \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \log_2 y = \quad \text{なので}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y \right\} = \quad .$$

問4.2.7 変数 y の関数 $\left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y$ について, $y \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{5}{y^2} = 0 \quad \text{なので} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) = -3 \quad . \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \log_2 y = \infty \quad \text{なので}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y \right\} = -\infty \quad .$$

終

例 変数 x の関数 $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \infty .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7^x + 8^x}{9^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x + 8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = 0 .$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 8^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\} = \infty .$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty$ 及び $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty$ は発散しているので

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \right\}$ を $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^x$ に変形しないこと.

終

問4.2.8 変数 x の関数 $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ の

ときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{6}\right)^x = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{6}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^x = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \quad.$$

問4.2.8 変数 x の関数 $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ の

ときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \quad .$$

問4.2.8 変数 x の関数 $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ の

ときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\quad \right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\quad \right)^x = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\quad \right)^x + \left(\quad \right)^x \right\} = \quad .$$

問4.2.8 変数 x の関数 $\frac{4^x + 5^x}{6^x}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x \right\} = \infty .$$

終