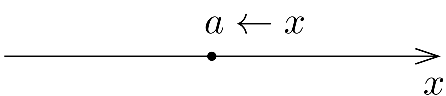
4.4　関数の右極限と左極限

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について，$x > a$ の範囲だけで考えるときや，$x < a$ の範囲だけで考えるときがある．

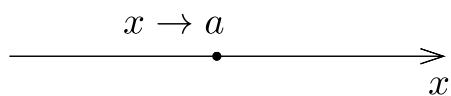
変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について，$x > a$ の範囲だけで考えるときや，$x < a$ の範囲だけで考えるときがある．$x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \to a+0$ と書き表し，このときの極限を右極限という．

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について，$x > a$ の範囲だけで考えるときや，$x < a$ の範囲だけで考えるときがある．$x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \to a+0$ と書き表し，このときの極限を右極限という．また，$x < a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \to a-0$ と書き表し，このときの極限を左極限という．

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について，$x > a$ の範囲だけで考えるときや，$x < a$ の範囲だけで考えるときがある．$x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \to a+0$ と書き表し，このときの極限を右極限という．また，$x < a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \to a-0$ と書き表し，このときの極限を左極限という．数直線上において，右極限を表す $x \to a+0$ は x の値を a の右側から a に近づけることであり，左極限を表す $x \to a-0$ は x の値を a の左側から a に近づけることである．



右極限 $x \to a+0$



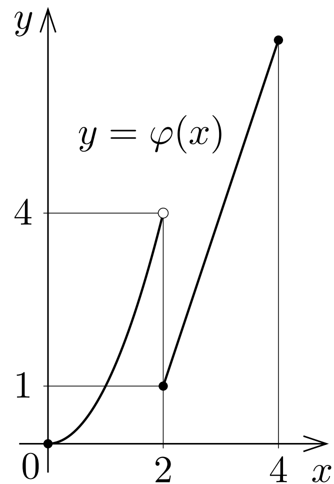
左極限 $x \to a-0$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (\ 0 \leq x < 2 \ \text{のとき}) \\ 3x - 5 & (\ 2 \leq x \leq 4 \ \text{のとき}) \end{cases}.$$

例 区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

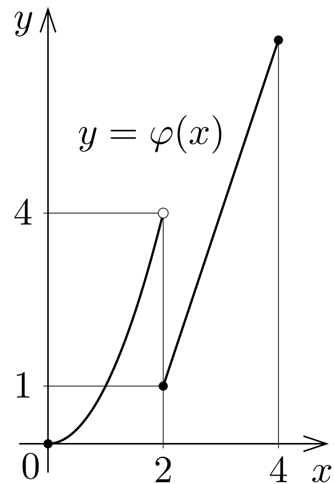
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & （\ 0 \leq x < 2 \ のとき） \\ 3x-5 & （\ 2 \leq x \leq 4 \ のとき） \end{cases}.$$



$\boxed{例}$ 区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (\ 0 \leq x < 2 \ \text{のとき}) \\ 3x-5 & (\ 2 \leq x \leq 4 \ \text{のとき}) \end{cases}.$$

変数 x について，$2 \leq x \leq 4$ のとき $\varphi(x) = 3x-5$ なので，$x > 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと，$\varphi(x)$ の値は $3 \cdot 2 - 5 = 1$ に限りなく近づいていく.

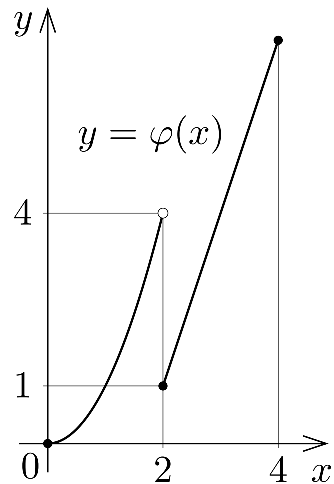


$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (\ 0 \leq x < 2 \ \text{のとき}) \\ 3x-5 & (\ 2 \leq x \leq 4 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について，$2 \leq x \leq 4$ のとき $\varphi(x) = 3x-5$ なので，$x > 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと，$\varphi(x)$ の値は $3\cdot 2-5 = 1$ に限りなく近づいていく．このようなとき，1 を $\varphi(x)$ の右極限値といい，この右極限値を $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\varphi(x)$ と書き表す：

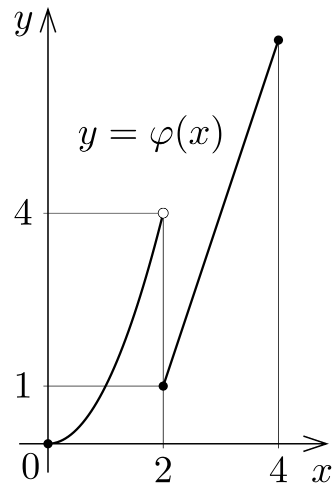
$$\lim_{x\to 2+0}\varphi(x) = 1\ .$$



$\boxed{例}$ 区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (\ 0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x-5 & (\ 2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について，$0 \leq x < 2$ のとき $\varphi(x) = x^2$ なので，$x < 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと，$\varphi(x)$ の値は $2^2 = 4$ に限りなく近づいていく.

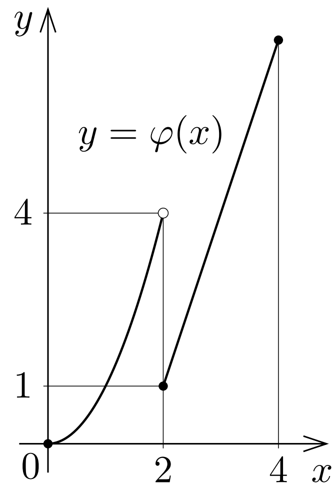


例 区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (\ 0 \leq x < 2 \ \text{のとき}) \\ 3x-5 & (\ 2 \leq x \leq 4 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について，$0 \leq x < 2$ のとき $\varphi(x) = x^2$ なので，$x < 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと，$\varphi(x)$ の値は $2^2 = 4$ に限りなく近づいていく．このようなとき，4 を $\varphi(x)$ の左極限値といい，この左極限値を $\lim_{x \to 2-0} \varphi(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to 2-0} \varphi(x) = 4 \ .$$



終

一般的に述べる.

関数 f 及び実数 a について，f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけることができて，

x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を f の右極限（値）という．

関数 f 及び実数 a について，f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x>a$ である範囲で a に限りなく近づけることができて，

x の値を $x>a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x\to a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を f の右極限（値）という．$x\to a+0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば，そのときの右極限値を

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$

と書き表す．特に $a=0$ のとき，$x\to 0+0$ を $x\to +0$ と略記する．

関数 f 及び実数 a について，f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x<a$ である範囲で a に限りなく近づけることができて，

x の値を $x<a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を f の左極限（値）という．

関数 f 及び実数 a について，f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけることができて，

x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を f の左極限（値）という．$x \to a-0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば，そのときの左極限値を

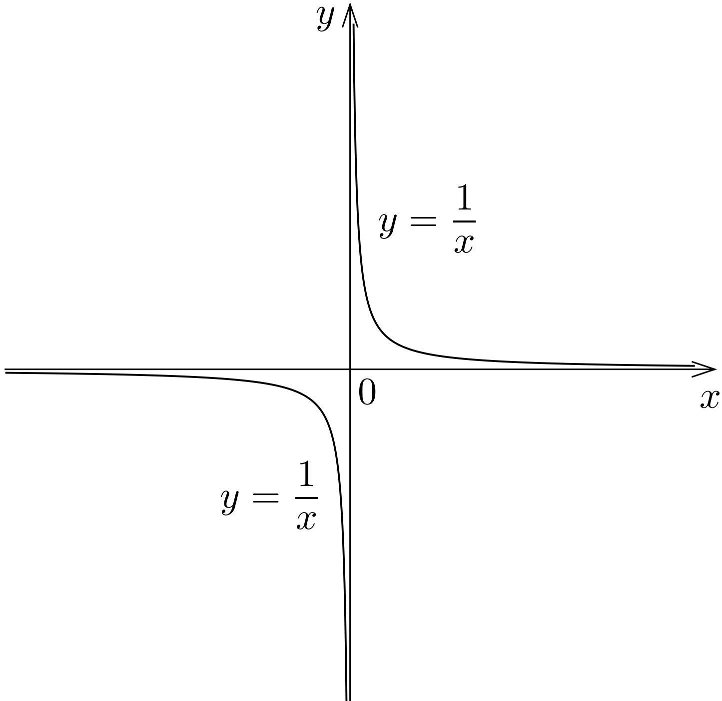
$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$

と書き表す．特に $a = 0$ のとき，$x \to 0-0$ を $x \to -0$ と略記する．

関数の右極限および左極限においても ∞ あるいは $-\infty$ に発散することがある.

例

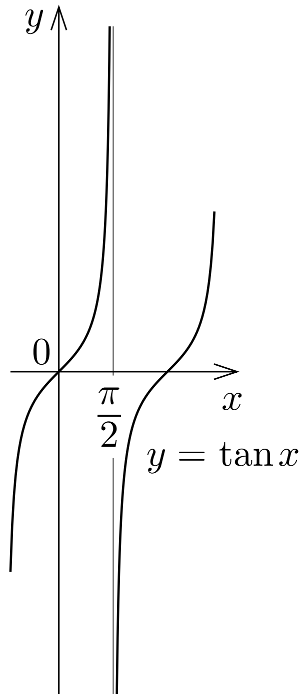
$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x} = \infty\ ,\qquad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x} = -\infty\ .$$



終

例

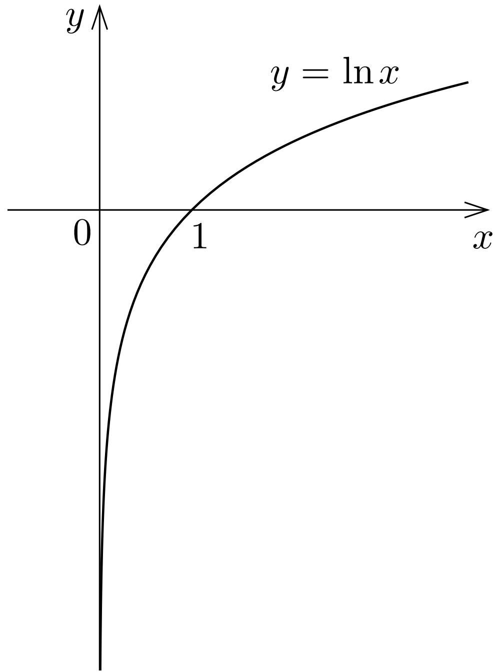
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty \ .$$



終

例

$$\lim_{x \to +0} \ln x = -\infty \ .$$



終

次の定理が成り立つ（証明は略す）.

定理　関数 f 及び実数 a, c について,

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = c \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

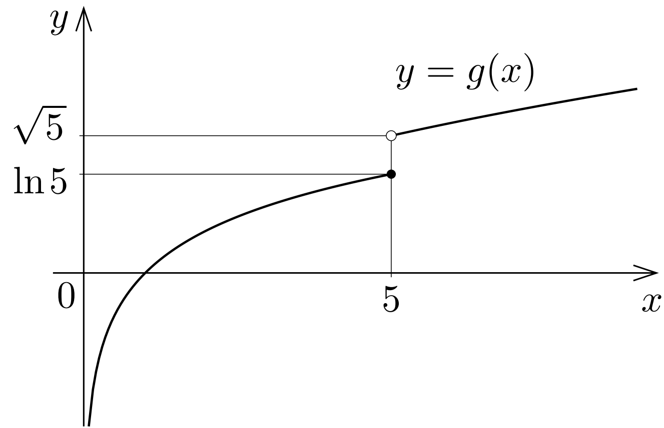
$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (\ 0 < x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sqrt{x} & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

$g(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x\to 5+0} g(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 5-0} g(x)$ とを調べる.

例 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (\ 0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (\ x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$g(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x\to 5+0} g(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 5-0} g(x)$ とを調べる.



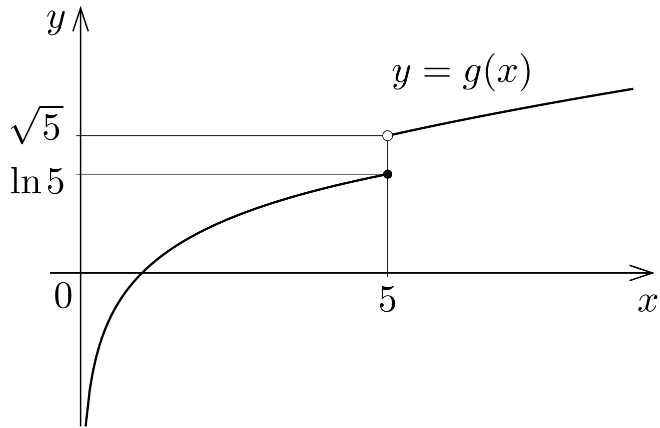
$\boxed{例}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x)=\begin{cases}\ln x & (\ 0<x\leq 5\ \text{のとき})\\ \sqrt{x} & (\ x>5\ \text{のとき})\end{cases}.$$

$g(x)$ の右極限 $\lim\limits_{x\to 5+0} g(x)$ と左極限 $\lim\limits_{x\to 5-0} g(x)$ とを調べる.

変数 x について，$x\to 5+0$ のとき，$x>5$ なので $g(x)=\sqrt{x}$ ，よって

$$\lim_{x\to 5+0} g(x)=\lim_{x\to 5+0}\sqrt{x}=\sqrt{5}\ .$$



$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (\ 0 < x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sqrt{x} & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases}.$$

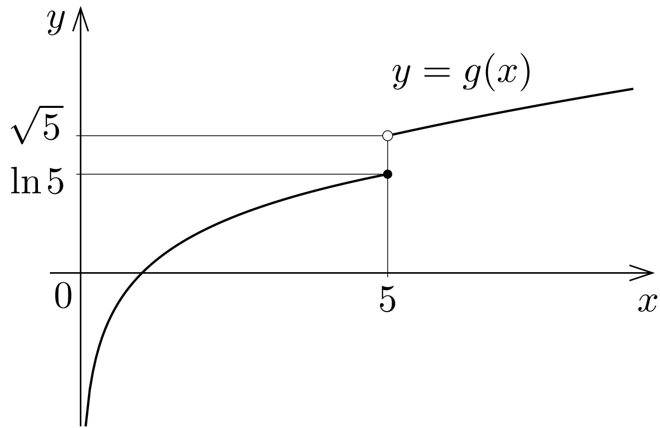
$g(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x \to 5+0} g(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x \to 5-0} g(x)$ とを調べる.

変数 x について，$x \to 5+0$ のとき，$x > 5$ なので $g(x) = \sqrt{x}$，よって

$$\lim_{x \to 5+0} g(x) = \lim_{x \to 5+0} \sqrt{x} = \sqrt{5}.$$

変数 x について，$x \to 5-0$ のとき，$x < 5$ なので $g(x) = \ln x$，よって

$$\lim_{x \to 5-0} g(x) = \lim_{x \to 5-0} \ln x = \ln 5.$$



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.4.1}$ 区間 $(0,10]$ を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & （\ 0 < x < 8 \ \text{のとき}） \\ x^{\frac{4}{3}} & （\ 8 \leq x \leq 10 \ \text{のとき}） \end{cases}.$$

$f(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x \to 8+0} f(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x \to 8-0} f(x)$ とを調べよ．

$8 \leq x \leq 10$ のとき $f(x) =$ 　　　　なので，

$$\lim_{x \to 8+0} f(x) = \lim_{x \to 8+0} \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$0 < x < 8$ のとき $f(x) =$ 　　　　なので，

$$\lim_{x \to 8-0} f(x) = \lim_{x \to 8-0} \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.4.1}$ 区間 $(0,10]$ を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (\ 0 < x < 8 \ \text{のとき}) \\ x^{\frac{4}{3}} & (\ 8 \leq x \leq 10 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

$f(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x\to 8+0} f(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 8-0} f(x)$ とを調べよ.

$8 \leq x \leq 10$ のとき $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ なので,

$$\lim_{x\to 8+0} f(x) = \lim_{x\to 8+0} x^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16 \ .$$

$0 < x < 8$ のとき $f(x) = \log_2 x$ なので,

$$\lim_{x\to 8-0} f(x) = \lim_{x\to 8-0} \log_2 x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

次の定理があった.

定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする. $y=f(x)$ とおく. $x \to a$ のとき $y \to b$, $y \neq b$ で, $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y \to b} g(y)\ .$$

この定理は $x \to a+0$ のときや $x \to a-0$ のときなども成り立つ.

$\boxed{例}$ 変数 x について $x \to +0$ のときの $\dfrac{1}{\ln x}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \to +0$ のときの $\dfrac{1}{\ln x}$ の極限を調べる.

$y = \ln x$ とおく. $x \to +0$ のとき $y = \ln x \to -\infty$ なので,

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y} = 0 \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x について $x \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ のときの $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{\tan x}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ のときの $\left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x}$ の極限を調べる.

$y = \tan x$ とおく. $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ のとき $y = \tan x \to \infty$ なので,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x} = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{y} = 0 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.4.2(1)}$ 極限 $\lim_{x\to+0}(\log_2 x)^3$ について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ.

変数 y を $y=\log_2 x$ とおく. $x\to+0$ のとき $y=\log_2 x\to$ 　　　 なので,

$$\lim_{x\to+0}(\log_2 x)^3=\lim_{y\to}\qquad=\qquad.$$

$\boxed{問4.4.2(1)}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} (\log_2 x)^3$ について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ．

変数 y を $y = \log_2 x$ とおく． $x \to +0$ のとき $y = \log_2 x \to -\infty$ なので，

$$\lim_{x \to +0} (\log_2 x)^3 = \lim_{y \to -\infty} y^3 = -\infty \ .$$

$\boxed{終}$

問4.4.2(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{5}{3+\tan x}$ について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ.

変数 y を $y=\tan x$ とおく. $x\to\dfrac{\pi}{2}+0$ のとき $y=\tan x\to$ 　　　なので， $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(3+\tan x)=\lim_{y\to}\left(\quad\right)=$ 　　　，よって

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{5}{3+\tan x}=\lim_{y\to}\qquad\qquad=\quad.$$

$\boxed{\text{問}4.4.2(2)}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3+\tan x}$ について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ.

変数 y を $y=\tan x$ とおく. $x\to\dfrac{\pi}{2}+0$ のとき $y=\tan x\to-\infty$ なので, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(3+\tan x)=\lim_{y\to-\infty}(3+y)=-\infty$, よって

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3+\tan x}=\lim_{y\to-\infty}\frac{5}{3+y}=0 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 4.4.2(3)}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to -0}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ．

変数 y を $y=\dfrac{1}{x}$ とおく． $x\to -0$ のとき $y=\dfrac{1}{x}\to$ 　　　なので，

$$\lim_{x\to -0}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to} \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.4.2(3)}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to -0}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ．

変数 y を $y=\dfrac{1}{x}$ とおく． $x\to -0$ のとき $y=\dfrac{1}{x}\to -\infty$ なので，

$$\lim_{x\to -0}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to -\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y}=0\ .$$

$\boxed{\text{終}}$