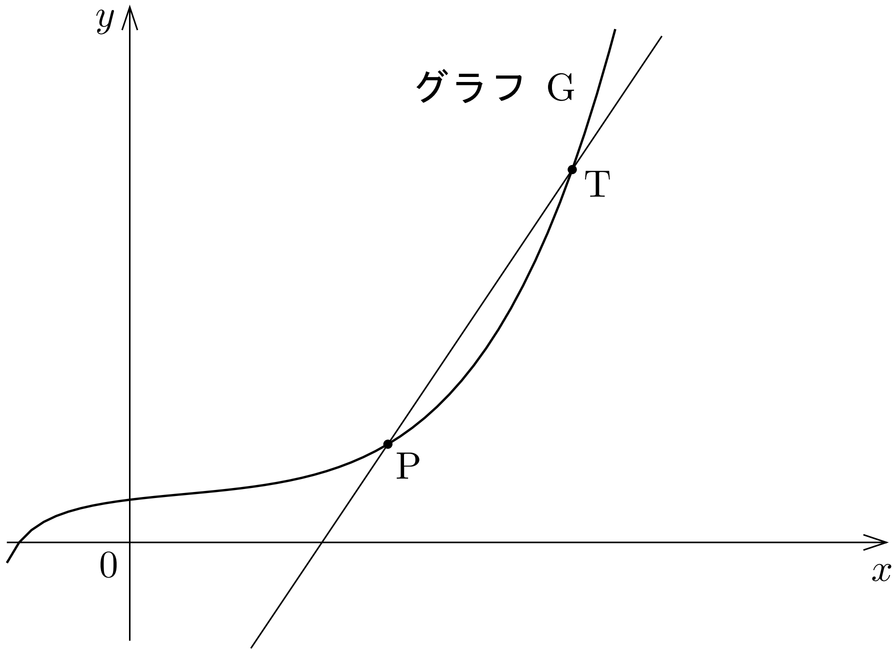
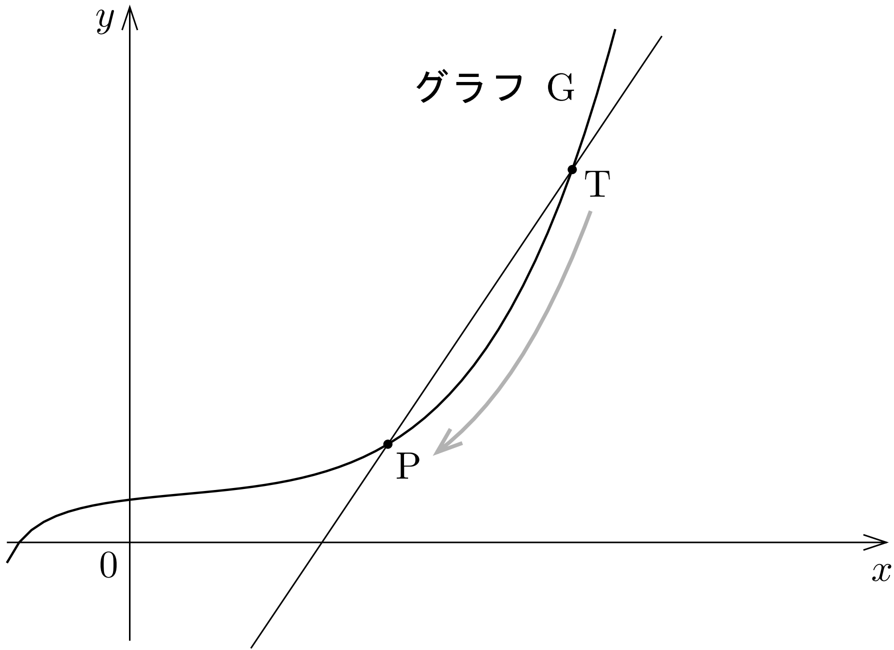
4.6 関数のグラフの接線

関数のグラフの接線の定義を復習する.

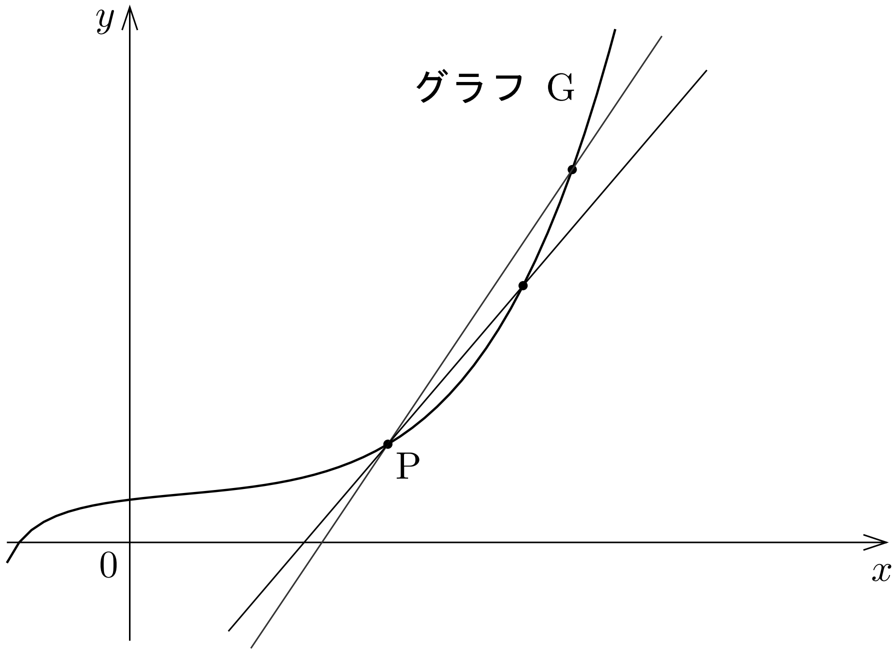
　座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える.



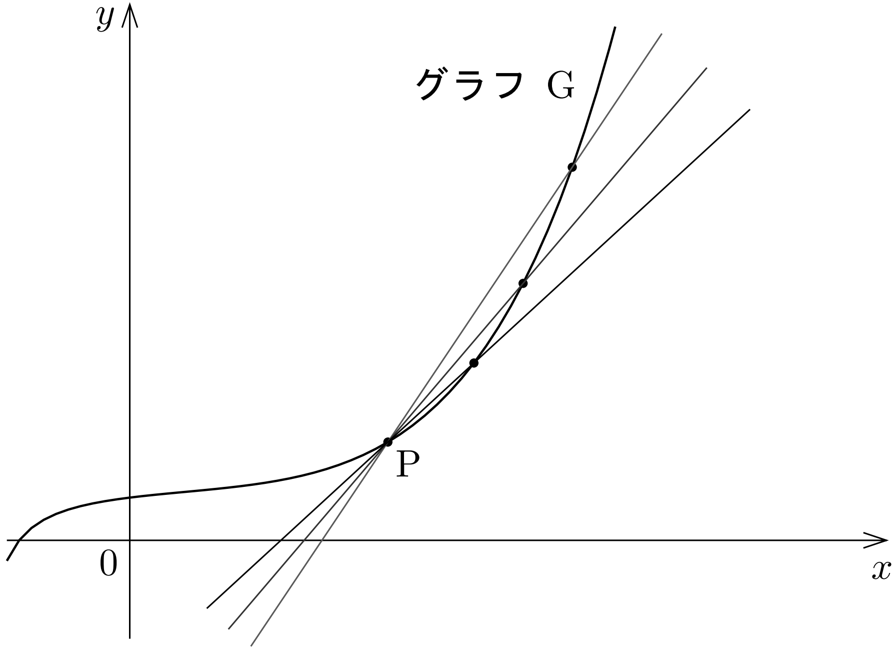
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考る．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



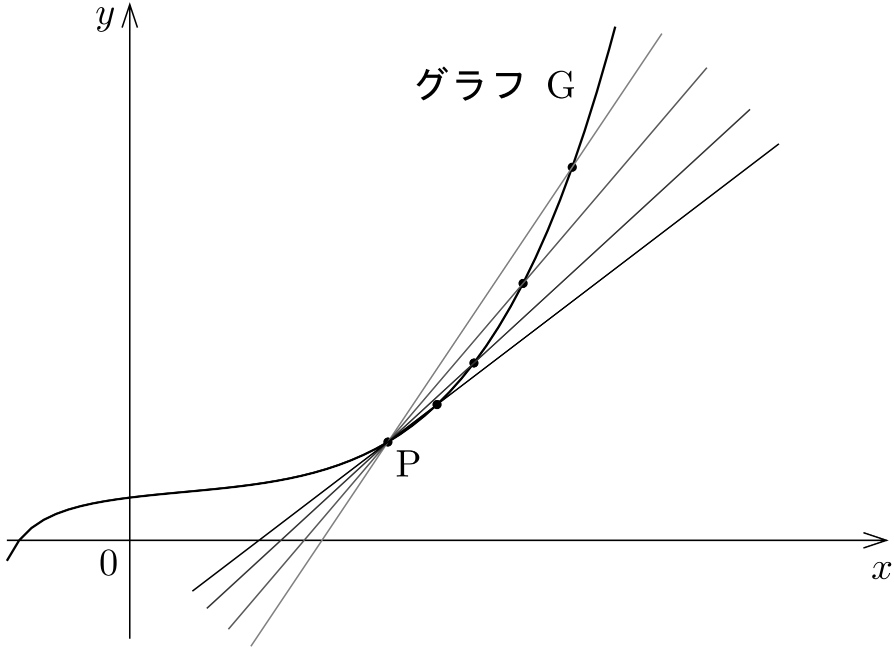
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（$\mathrm{T} \neq \mathrm{P}$）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



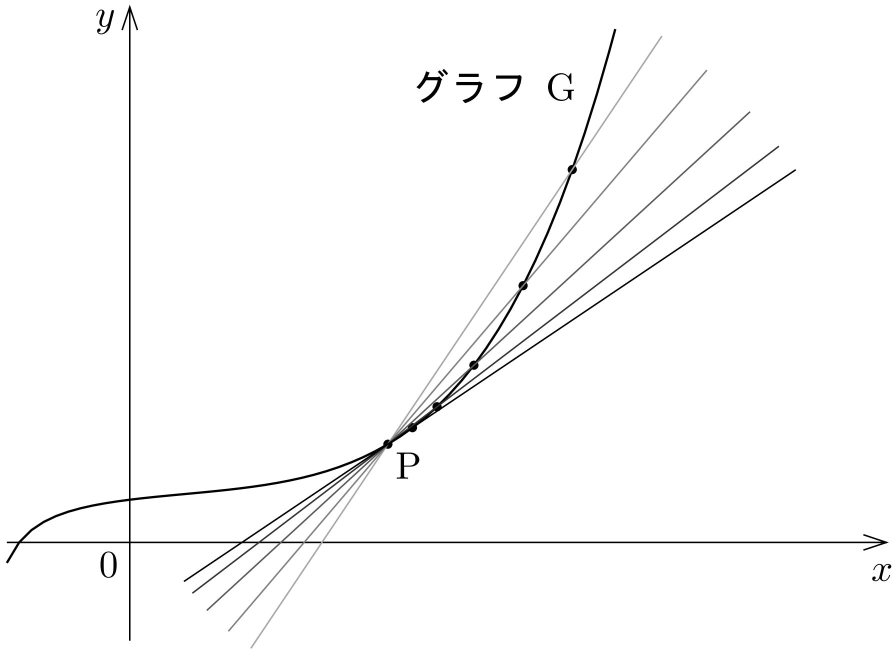
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



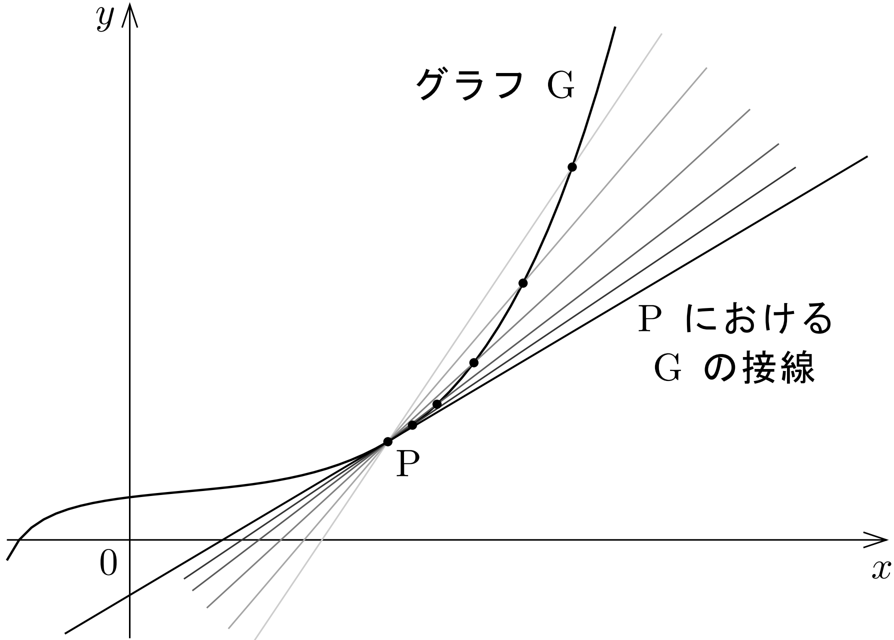
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（$\mathrm{T} \neq \mathrm{P}$）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



動点 T を定点 P に限りなく近づけるとき，直線 PT がある 1 本の直線 L に限りなく近づくならば，この直線 L を点 P におけるグラフ G の接線といい，点 P を接点という.



関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

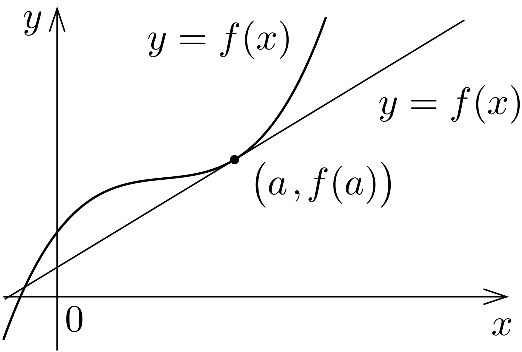
f のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線の傾きは f の a における微分係数であった．

関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線の傾きは f の a における微分係数であった．f の a における微分係数は f の導関数の値 $f'(a)$ なので，

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線の傾きは $f'(a)$

である．



$y = f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線

傾きは $f'(a)$

　xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （ c は定数）となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば， $x = a$ のとき $y = b$ なので， $b = ma + c$ ， $c = b - ma$ ；よって，点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である．

　xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

　関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考える．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線は，接点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は

$y=\qquad(x-\quad)+\qquad$ である．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （c は定数）となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば，$x = a$ のとき $y = b$ なので，$b = ma + c$ ，$c = b - ma$ ；よって，点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える．$y = f(x)$ のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線は，接点 $\big(a, f(a)\big)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ である．

定理　関数 f が実数 a において微分可能であるとき，xy 座標平面において，f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線がある；その接線を表す方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 \ .$$

従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式は

$y = 6(x + 1) + 3$,

関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線を表す方程式は

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める. xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3 = -1-4+5-3 = 3\ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3) = 3x^2-8x-5\ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2-8(-1)-5 = 3+8-5 = 6\ .$$

従って $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y=6(x+1)+3$, つまり $y=6x+9$. 終

$\boxed{問 4.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$ と定める．xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式を求めよ．

$f(-2) =$ ． $f'(x) =$ なので $f'(-2) =$ ． $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y = \quad (x \quad)$ つまり $y =$ ．

$\boxed{\text{問}4.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-5x+7}{2}$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式を求めよ．

$f(-2)=-\dfrac{3}{2}$ ． $f'(x)=\dfrac{3x^2-6x-5}{2}$ なので $f'(-2)=\dfrac{19}{2}$ ． $y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y=\dfrac{19}{2}(x+2)-\dfrac{3}{2}$ つまり $y=\dfrac{19}{2}x+\dfrac{35}{2}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3\cdot 2+1) = \ln 7\ .$$

接点は $(2,\ln 7)$. $t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} \ .$$

点 $(2, \ln 7)$ における $y = \psi(x)$ の接線を表す方程式は $y = \frac{3}{7}(x-2) + \ln 7$

関数 $y = \psi(x)$ のグラフの点 $(a, \psi(a))$ における接線を表す方程式は

$y = \psi'(a)(x-a) + \psi(a)$

例 区間 $\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3\cdot 2+1) = \ln 7\ .$$

接点は $(2,\ln 7)$. $t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1}\ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3\cdot 2+1} = \frac{3}{7}\ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ の接線を表す方程式は $y=\dfrac{3}{7}(x-2)+\ln 7$ つまり $y=\dfrac{3}{7}x-\dfrac{6}{7}+\ln 7$. 終

$\boxed{問4.6.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定める．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めよ．

$f(e)=$ $\qquad\qquad=\qquad$. $\varphi'(x)=$ $\qquad\qquad$ なので $\varphi'(e)=$ $\qquad$. $y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y=$ $\qquad\qquad\qquad$ つまり $y=$ $\qquad\qquad$.

$\boxed{\text{問}4.6.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定める．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めよ．

$f(e)=(\ln e)^2=1$ ． $\varphi'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ なので $\varphi'(e)=\dfrac{2}{e}$ ． $y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y=\dfrac{2}{e}(x-e)+1$ つまり $y=\dfrac{2}{e}x-1$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$\boxed{例}$ xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの, x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$, 従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$.

また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$.

また,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x\cos x \ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = -2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

例 xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$．

また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x \ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=-2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

従って $y=\cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3}{4}$ ．関数 $y=\psi(x)$ のグラフの点 $(a,\psi(a))$ における接線を表す方程式は $y=\psi'(a)(x-a)+\psi(a)$

$\boxed{例}$ xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$ ．

また，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x \cos x \ .$$

よって，$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = -2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

従って $y = \cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y = \qquad\qquad\qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \qquad\qquad\qquad .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \qquad \Big(x \qquad \Big) + \qquad .$$

$\boxed{問4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5\cdot\dfrac{d}{dx}(\cos x+2)}{(\cos x+2)^2}=\frac{5\sin x}{(\cos x+2)^2}\ .$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y=\frac{5}{\cos\dfrac{\pi}{3}+2}=\frac{5}{\dfrac{1}{2}+2}=2\ ,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{5\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+2\right)^2}=\frac{5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{5}\ .$$

$y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ ．

$\boxed{終}$