4.8 級数

無限数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の項 $a_0\,, a_1\,, a_2\,, a_3\,, \ldots\,, a_n\,, a_{n+1}\,, \ldots$ を順に $+$ でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；正確には次のように書き表す：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad .$$

無限数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ を順に $+$ でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；正確には次のように書き表す：

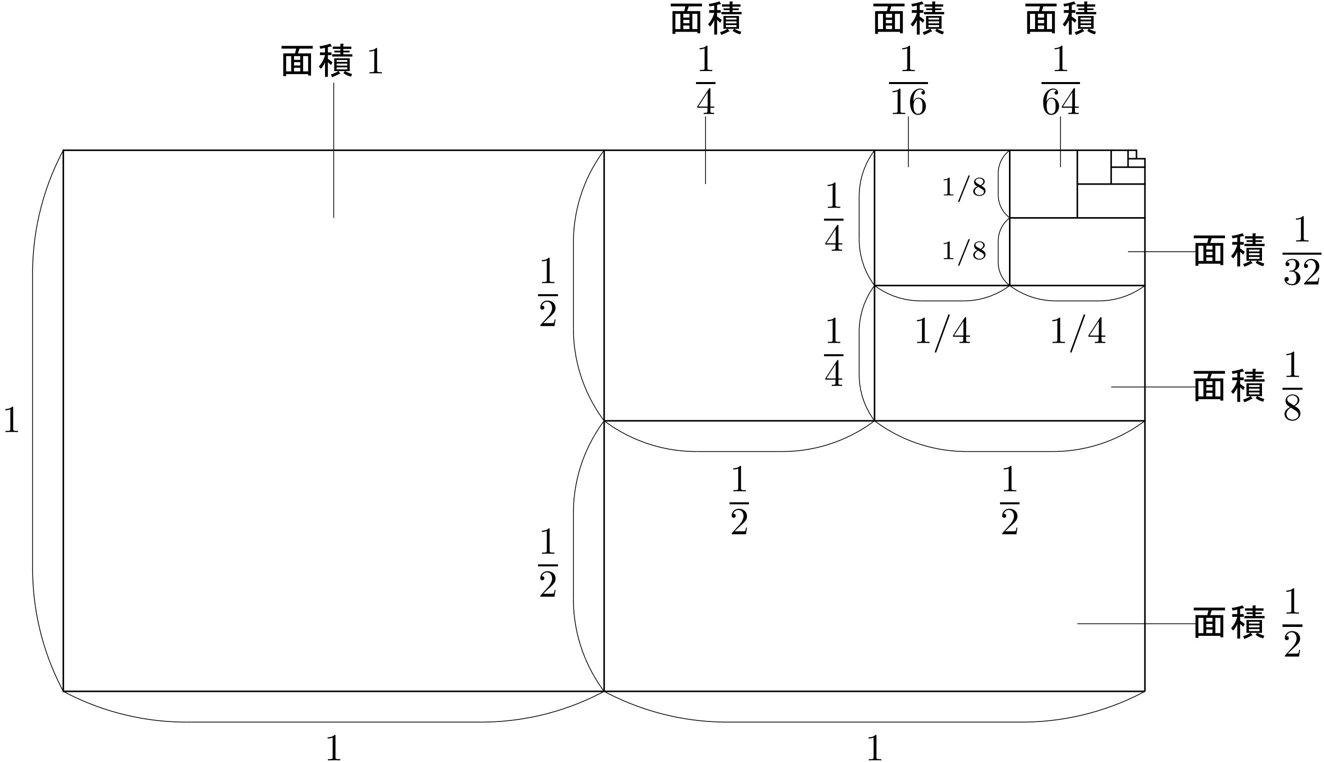
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

この（無限）級数では，無限個の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ の値を合計することを表したい．しかし，無限個の値を合計することは実際にはできない．

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ つまり

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

を考える．次のように，面積が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \cdots$ の正方形または長方形をくっつけていく．



面積 1
面積 $\frac{1}{4}$
面積 $\frac{1}{16}$
面積 $\frac{1}{64}$
面積 $\frac{1}{32}$
面積 $\frac{1}{8}$
面積 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$
1/8
1/8
1/4
1/4
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
1
1
1

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

である．このように無限個の値を合計することはできない．

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

である．このように無限個の値を合計することはできない．しかし，このような正方形または長方形を限りなくくっつけていくと，面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく．

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

である．このように無限個の値を合計することはできない．しかし，このような正方形または長方形を限りなくくっつけていくと，面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく．このことから次のように思える：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 2 \ .$$

次のように考える.

次のように考える．$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ とおくと，

$$2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\ ,$$

$$S=\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\ ,$$

次のように考える． $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ とおくと，

$$2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\ ,$$

$$S=\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\ ,$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと $S=2-\frac{1}{2^n}$ なので，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}\ .$$

次のように考える． $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ とおくと，

$$2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\ ,$$

$$S=\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\ ,$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと $S=2-\frac{1}{2^n}$ なので，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}\ .$$

$n\to\infty$ のときの極限を考える：

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\\
&=2\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

一般的に，無限数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して（無限）級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \ .\end{aligned}$$

一般的に，無限数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して（無限）級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \quad .\end{aligned}$$

この極限値を級数の和という.

定義　自然数 m に対する値から始まる無限数列 $\{a_n\}_{n\geq m}$ に対して，数列 $\left\{\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が収束するとき，級数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといい，数列 $\left\{\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ を級数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k .$$

この極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ を級数の和という.

定義　自然数 m に対する値から始まる無限数列 $\{a_n\}_{n\geq m}$ に対して，数列 $\left\{\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといい，数列 $\left\{\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k$ を級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k\ .$$

この極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k$ を級数の和という．また，数列 $\left\{\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が発散するとき，級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は発散するという．

つまり，例えば数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$ があるときに限り級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値があって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \ .$$

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$ がないときは級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値もない．

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right) &= \frac{5}{2}-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\frac{5}{5}+\cdots+\frac{5}{n-1}-\frac{5}{n}+\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1} \\
&= \frac{5}{2}-\frac{5}{n+1} .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)&=\frac{5}{2}-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\frac{5}{5}+\cdots+\frac{5}{n-1}-\frac{5}{n}+\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\\
&=\frac{5}{2}-\frac{5}{n+1}\ .
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$ なので,

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{n+1}\right)=\frac{5}{2}\ . \qquad \boxed{\text{終}}
$$

$\boxed{\text{問}4.8.1}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right)$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{6}{k}-\frac{6}{k+1}\right)=$$

$$=\qquad\qquad\qquad.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}=\qquad$ なので,

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\qquad\qquad\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\qquad\qquad\right)$$

$$=\quad.$$

$\boxed{\text{問}4.8.1}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right)$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{6}{k}-\frac{6}{k+1}\right) &= \frac{6}{3}-\frac{6}{4}+\frac{6}{4}-\frac{6}{5}+\cdots+\frac{6}{n-1}-\frac{6}{n}+\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1} \\ &= 2-\frac{6}{n+1}\ .\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}=\qquad$ なので,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\qquad\qquad\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\qquad\qquad\right) \\ &= \qquad .\end{aligned}$$

$\boxed{問4.8.1}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right)$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{6}{k}-\frac{6}{k+1}\right) &= \frac{6}{3}-\frac{6}{4}+\frac{6}{4}-\frac{6}{5}+\cdots+\frac{6}{n-1}-\frac{6}{n}+\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1} \\ &= 2-\frac{6}{n+1}\ .\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}=0$ なので,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{6}{k}-\frac{6}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{6}{n+1}\right) \\ &= 2\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

実数の定数 a, r 及び自然数の定数 m に対して，等比数列 $\{ar^n\}_{n \geq m}$ からできる級数 $\sum_{n=m}^{\infty} (ar^n)$ を等比級数という.

例 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right\}$ の和を調べる.

$\boxed{例}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$.

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する. $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する. $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$$S_n=4\cdot\frac{3}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+4\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^n\ ,$$

$$\frac{3}{5}S_n=\qquad\qquad 4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+4\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^n+4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\ ;$$

$\boxed{例}$ 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$. まず総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$$S_n = 4\cdot\frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n ,$$

$$\frac{3}{5}S_n = \qquad 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} ;$$

この 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5}S_n = 4\cdot\frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する. $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$$S_n=4\cdot\frac{3}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+4\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^n\ ,$$

$$\frac{3}{5}S_n=\qquad\qquad 4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+4\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^n+4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\ ;$$

この 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5}S_n=4\cdot\frac{3}{5}-4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\ ,$$

よって $\displaystyle S_n=6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ つまり $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}=6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^{k}\right\} = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = 6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$ なので，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right\} = 6-10\cdot 0$$

$$= 6 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.8.2}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}.\quad S_n=\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}$$ とおく.

$$S_n = \qquad\qquad ,$$

$$\frac{2}{3}S_n = \qquad\qquad ,$$

$$\frac{1}{3}S_n = \qquad ,\quad S_n = \qquad ,\quad \sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\} = \qquad .$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \qquad$$ なので,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{10\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\qquad\qquad\right\}=$$

$$= \quad .$$

$\boxed{問 4.8.2}$ 等比級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}$ の和を調べよ.

$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}$. $S_n=\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}$ とおく.

$$S_n=\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\frac{32}{27}+\frac{64}{81}+\cdots+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n} ,$$

$$\frac{2}{3}S_n= \qquad \frac{16}{9}+\frac{32}{27}+\frac{64}{81}+\cdots+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} ,$$

$\frac{1}{3}S_n=\frac{8}{3}-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, $S_n=8-18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, $\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}=8-18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=$ 　 なので,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{10\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{ \qquad \right\}=$$

$$= \quad .$$

$\boxed{\text{問}\,4.8.2}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}\ .\quad S_n=\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}\ \text{とおく.}$$

$$S_n=\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\frac{32}{27}+\frac{64}{81}+\cdots+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\ ,$$

$$\frac{2}{3}S_n=\qquad\frac{16}{9}+\frac{32}{27}+\frac{64}{81}+\cdots+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ ,$$

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{8}{3}-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ ,\quad S_n=8-18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ ,\quad \sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right\}=8-18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$ なので,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{10\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{8-18\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}=8-18\cdot 0$$

$$=8\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

$\boxed{例}$ 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$. まず総和 $\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\}$. まず総和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\}$ を計算する.

等比数列の項の総和の公式を用いる：正の自然数 n 及び実数 a 及び実数 r について, $r\neq 1$ のとき

$$\underbrace{a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\}$. まず総和 $\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\}$ を計算する.

等比数列の項の総和の公式を用いる：正の自然数 n 及び実数 a 及び実数 r について, $r\neq 1$ のとき

$$\underbrace{a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\ .$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\}=\underbrace{3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^{2}+3\left(\frac{5}{7}\right)^{3}+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n}}_{\text{最初の項が } 3 \text{ で公比が } \frac{5}{7} \text{ で項数が } n+1}=\frac{3\left\{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{5}{7}}$$

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$. まず総和 $\sum_{k=3}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

等比数列の項の総和の公式を用いる : 正の自然数 n 及び実数 a 及び実数 r について, $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = 3 + 3\cdot\frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{3\left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}}{1 - \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{21}{2}\left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\} .$$

等比数列の項の総和の公式より

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\} = \frac{21}{2}\left\{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\} .$$

等比数列の項の総和の公式より

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\} = \frac{21}{2}\left\{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\} .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\right\} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^{k}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{21}{2}\left\{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}\right] = \frac{21}{2}(1-0)\\ &= \frac{21}{2} .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}4.8.3}$ 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^k\right\} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \qquad$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{9}{7}\right)^k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right] = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.8.3}$ 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^{k}\right\} = \frac{3\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{2}{5}} = 5\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right\}.$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \qquad$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{9}{7}\right)^{k}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right] = \qquad .$$

問4.8.3 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^{k}\right\} = \frac{3\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{2}{5}} = 5\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right\} .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{9}{7}\right)^{k}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[5\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right\}\right] = 5 .$$

終

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して， $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める．正の自然数 n に対して，

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ ;$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める. 正の自然数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n \ .$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して， $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める．正の自然数 n に対して，

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n \ .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和 S がある．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して，$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める．正の自然数 n に対して，

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n \ .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和 S がある．

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ .$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して， $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める．正の自然数 n に対して，

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n \ .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和 S がある．

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ .$$

従って更に

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ , \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ , \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \ .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0 \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ , \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \ .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0 \ .$$

故に，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ , \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \ .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0 \ .$$

故に，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

定理　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$\text{級数} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{が収束する ならば 数列} \ \{a_n\}_{n\geq 0} \ \text{は} \ 0 \ \text{に収束する.}$$

この対偶をとると次のことが分かる：

$$\text{数列} \ \{a_n\}_{n\geq 0} \ \text{が} \ 0 \ \text{に収束しない ならば 級数} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{は収束しない.}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$\text{級数}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ \text{が収束する ならば 数列}\ \{a_n\}_{n\geq 0}\ \text{は}\ 0\ \text{に収束する.}$$

この対偶をとると次のことが分かる:

$$\text{数列}\ \{a_n\}_{n\geq 0}\ \text{が}\ 0\ \text{に収束しない ならば 級数}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ \text{は収束しない.}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある:

(1) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は収束しないつまり発散する;

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は収束するけれど $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$\text{級数} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{が収束する ならば 数列} \ \{a_n\}_{n\geq 0} \ \text{は} \ 0 \ \text{に収束する.}$$

この対偶をとると次のことが分かる:

$$\text{数列} \ \{a_n\}_{n\geq 0} \ \text{が} \ 0 \ \text{に収束しない ならば 級数} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{は収束しない.}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある:

(1) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は収束しないつまり発散する;

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は収束するけれど $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

このどちらの場合も級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しないつまり発散する.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する ならば 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する.

この対偶をとると次のことが分かる:

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が 0 に収束しない ならば 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある:

(1) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は収束しないつまり発散する;

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は収束するけれど $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

このどちらの場合も級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しないつまり発散する.

定理

(1) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が発散するならば,級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば,級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

しかし， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でも級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない； $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でも級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することがある．

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^{n}$ の和を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n$ の和を調べる.

公比 $\dfrac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は発散するので，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n$ は発散する.

$\boxed{\text{問}4.8.4}$ 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べよ.

$\boxed{\text{問}4.8.4}$ 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べよ.

公比 $-\frac{7}{6}$ の等比数列 $\left\{\left(-\frac{7}{6}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は発散するので, 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{6}\right)^n$ は発散する.

例 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる.

例 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)=5-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=5-0=5\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)=5-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=5-0=5\ .$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)\neq 0$ なので, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$ は発散する. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.8.5}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2+3}-7\right)$ の和を調べよ.

$\boxed{\text{問}4.8.5}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2+3}-7\right)$ の和を調べよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2+3}=0$$ なので, $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^2+3}-7\right)=0-7=-7$$ ． よって $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^2+3}-7\right)\neq 0$$ なので, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2+3}-7\right)$ は発散する.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

$\boxed{例}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$. まず $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$. まず $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$ を計算する.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}=\underbrace{5+5\cdot\frac{1}{3}+5\left(\frac{1}{3}\right)^2+5\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+5\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{最初の項が } 5 \text{ で公比が } \frac{1}{3} \text{ で項数が } n+1}=\frac{5\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$\boxed{例}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k}$. まず $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k}$ を計算する.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k} = 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{15}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) .$$

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$. まず $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$ を計算する.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}=5+5\cdot\frac{1}{3}+5\left(\frac{1}{3}\right)^2+5\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+5\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{5\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{15}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\ .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{15}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right\}=\frac{15}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.8.6}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{6}{4^k} =$$

.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n+1}} =$ 　　なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{6}{4^k} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \qquad\qquad \right\} = \quad .$$

$\boxed{\text{問 } 4.8.6}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{4^n}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{6}{4^k}=\sum_{k=0}^{n}\left\{6\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}=\frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}}{\frac{3}{4}}$$

$$=8\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right).$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^{n+1}}=\qquad$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{6}{4^k}=\lim_{n\to\infty}\left\{\qquad\qquad\right\}=\qquad.$$

$\boxed{問 4.8.6}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{6}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ 6\left(\frac{1}{4}\right)^k \right\} = \frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}}{\frac{3}{4}}$$

$$= 8\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right) .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{6}{4^k} = \lim_{n\to\infty} \left\{ 8\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right) \right\} = 8 .$$

$\boxed{終}$

正の自然数 n 及び実数 a 及び 1 以外の実数 r について，

$$\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \;\; ;$$

次の定理があった：定数 r を公比とする無限等比数列 $\{r^n\}$ について，

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = \infty \quad ;$$
$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = 1 \quad ;$$
$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad ;$$

$r \leq -1$ のとき，無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが，∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）．

正の自然数 n 及び実数 a 及び 1 以外の実数 r について，

$$\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \ ;$$

$-1 < r < 1$ のとき， $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ なので，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \ .$$

正の自然数 n 及び実数 a 及び 1 以外の実数 r について,

$$\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \ ;$$

$-1<r<1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \ .$$

このようにして次の定理が導かれる.

定理　最初の項が a で公比が r である無限等比数列に対する級数は, $|r|<1$ のとき収束して

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(ar^n) = \frac{a}{1-r} \ ,$$

$|r|\geq 1$ かつ $a\neq 0$ のとき発散する.

$\boxed{\text{例}}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^{n}\right\}$ の和を調べる.

例 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

　等比数列 $\left\{2\left(\dfrac{3}{7}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ の公比 $\dfrac{3}{7}$ について $\left|\dfrac{3}{7}\right|<1$ なのでこの級数は収束する.

例 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる.

等比数列 $\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ の公比 $\frac{3}{7}$ について $\left|\frac{3}{7}\right|<1$ なのでこの級数は収束する.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}=\frac{6}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^2+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^4+\cdots=\frac{\frac{6}{7}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{6}{4}$$

$$=\frac{3}{2}\ .$$

終

$\boxed{問 4.8.7}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べよ.

$\boxed{問 4.8.7}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べよ.

等比数列 $\left\{2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ の公比 $\dfrac{2}{5}$ について $\left|\dfrac{2}{5}\right| < 1$ なのでこの級数は収束する.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\} = \frac{6}{5} + \frac{6}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \cdots = \frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{6}{3} = 2\ .$$

級数について次の定理が成り立つ.

定理　定数 c 及び数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と $\{b_n\}_{n\geq 0}$ とについて，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{（複号同順）．}$$