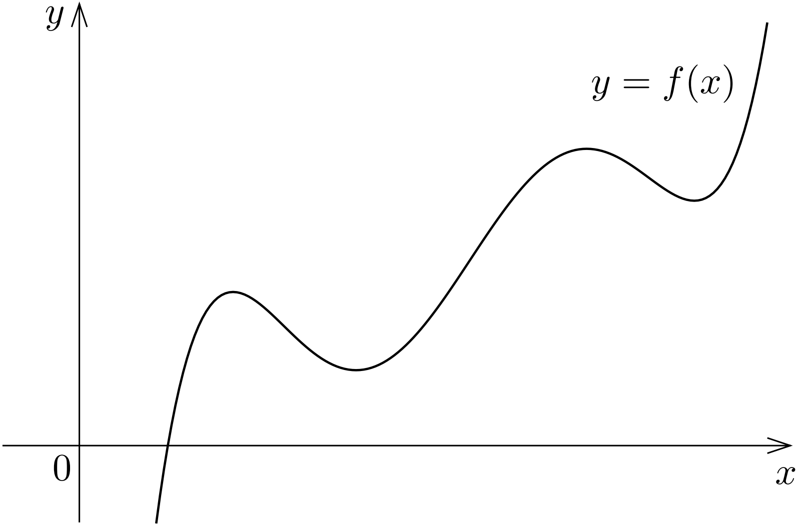
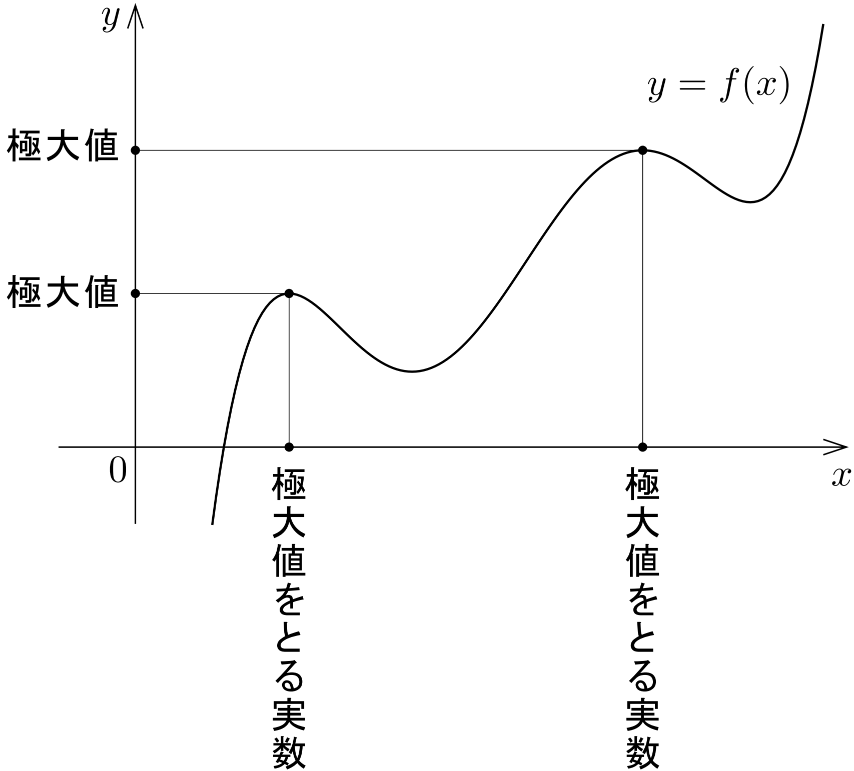
5.1 関数の極値

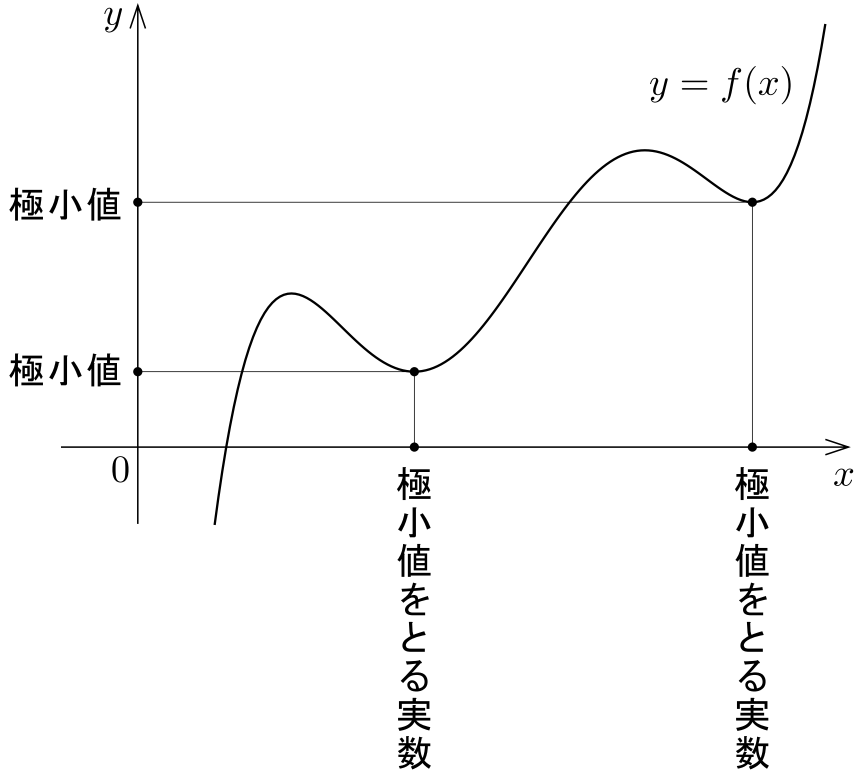
実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すとする.



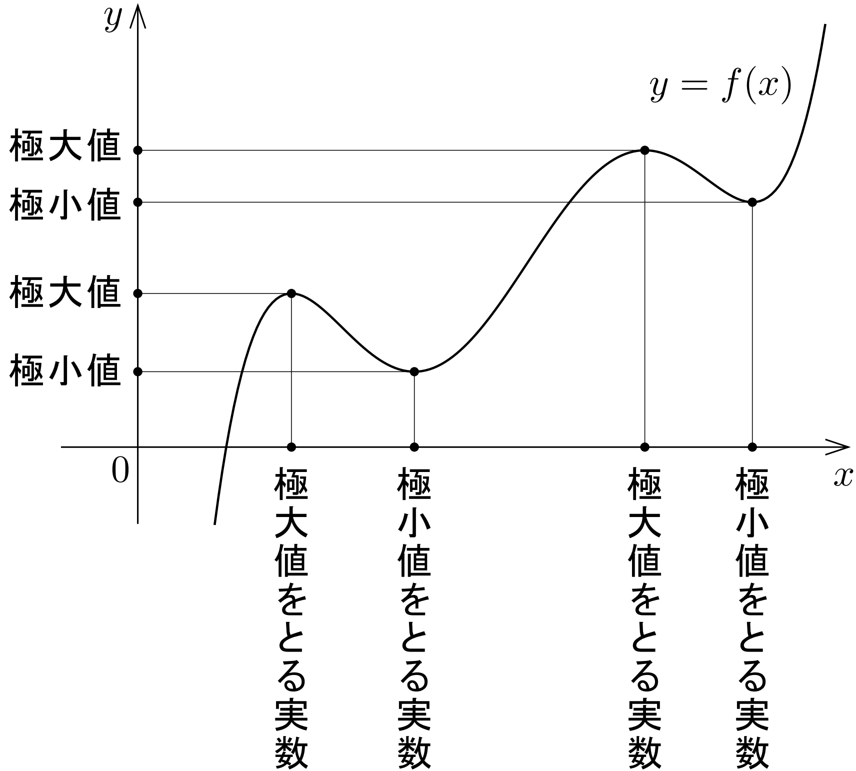
実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属するとする．f が p において極大値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．



　実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属するとする．f が p において極大値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．f が p において極小値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最小になることである．



実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すとする．f が p において極大値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．f が p において極小値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最小になることである．

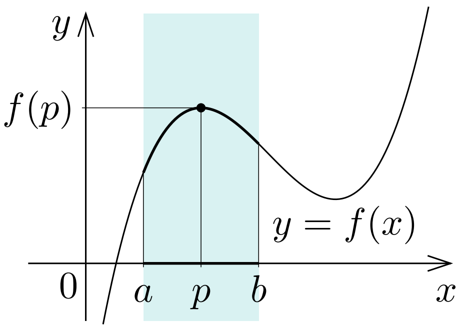


正確な定義を述べる.

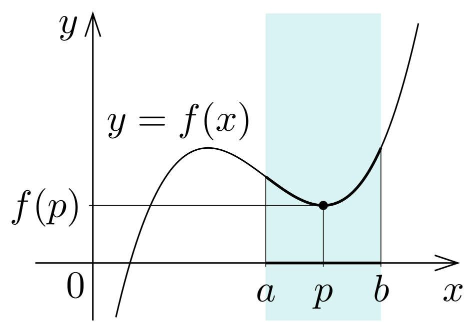
正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ であるある実数 a, b を選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．

正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ であるある実数 a, b を選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．f が p において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ であるある実数 a, b を選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \leq f(x)$ ．

正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ であるある実数 a, b を選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．f が p において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ であるある実数 a, b を選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \leq f(x)$ ．



f が p において極大値をとる．
水色の部分だけを考えると f は p において最大値をとる．



f が p において極小値をとる．
水色の部分だけを考えると f は p において最小値をとる．

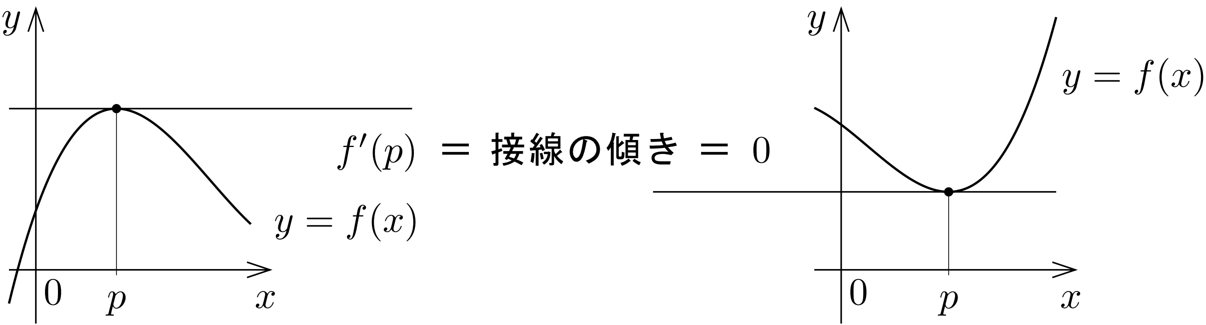
極大値と極小値を併せて極値という.

極大値と極小値を併せて極値という.

関数の最大値・最小値はあるとしても 1 つだけである. 関数の極大値・極小値は, 数多くあることがあるし, 一つもないこともある.

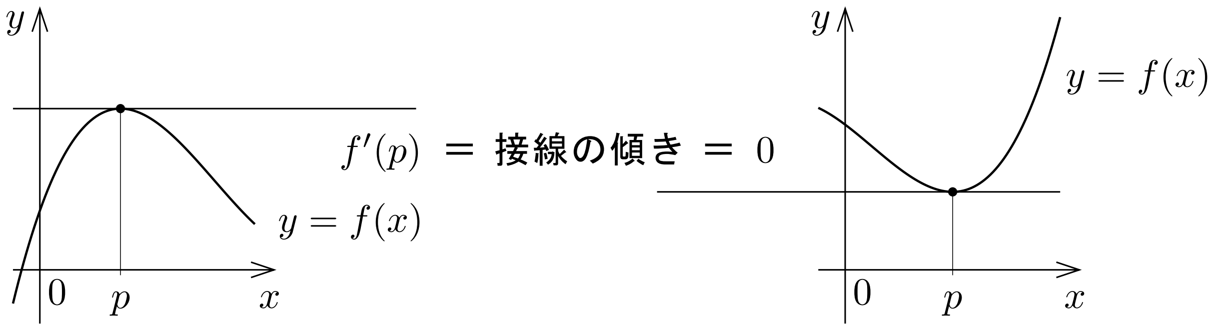
実数 p において微分可能である関数 f の微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きである.

実数 p において微分可能である関数 f の微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $\bigl(p, f(p)\bigr)$ における接線の傾きである．関数のグラフにおいて，関数が極値をとるところで，接線は“水平”である，つまり接線の傾きは 0 である．



関数 f が実数 p において極値をとるときのグラフの状態

実数 p において微分可能である関数 f の微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $\bigl(p, f(p)\bigr)$ における接線の傾きである．関数のグラフにおいて，関数が極値をとるところで，接線は“水平”である，つまり接線の傾きは 0 である．



関数 f が実数 p において極値をとるときのグラフの状態

このように考えると次の定理が成り立つ．

定理　関数 f が実数 p において微分可能であるとき，f が p において極値をとるならば $f'(p) = 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ より $f'(x)=3x^2-6x-9$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ より $f'(x)=3x^2-6x-9$ ．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p)=0$ なので，$3p^2-6p-9=0$ ，$3(p+1)(p-3)=0$ ，よって $p=3,-1$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ より $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ ．実数 p において f が極値をとるとすると， $f'(p) = 0$ なので， $3p^2 - 6p - 9 = 0$ ， $3(p+1)(p-3) = 0$ ，よって $p = 3, -1$ ．関数 f には異なる 2 個の極値があるので，f は 3 と -1 とにおいて極値をとる． $f(-1) = 25$ ． $f(3) = -7$ ．関数 f の極値は 25 と -7 との 2 個である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-2x^2-4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 つの極値がある．その 2 個の極値を求めよ．

$f'(x) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p)=0$ なので，＿＿＿＿＿＿＿＿ $=0$，$($ ＿＿＿ $)($ ＿＿＿ $)=0$，$p=$ ＿＿ または $p=$ ＿＿．$f($ ＿ $)=$ ＿＿ と $f\left(\text{＿＿} \right)=$ ＿＿ 以外に f の極値は無い．f には異なる 2 個の極値があるので，2 個の極値は ＿＿ と ＿＿ とである．

$\boxed{問 5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-2x^2-4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求めよ．

$f'(x)=3x^2-4x-4$ ．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p)=0$ なので，$3p^2-4p-4=0$ ，$(\quad\quad)(\quad\quad)=0$ ，$p=$ 　　または $p=$ 　　．$f(\ )=$ 　　と $f\left(\quad\right)=$ 　　以外に f の極値は無い．f には異なる 2 個の極値があるので，2 個の極値は 　　と 　　とである．

$\boxed{問 5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ ．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p) = 0$ なので，$3p^2 - 4p - 4 = 0$ ，$(3p+2)(p-2) = 0$ ，$p = 2$ または $p = -\dfrac{2}{3}$ ．$f(2) = -8$ と $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{40}{27}$ 以外に f の極値は無い．f には異なる 2 個の極値があるので，2 個の極値は -8 と $\dfrac{40}{27}$ とである． $\boxed{終}$