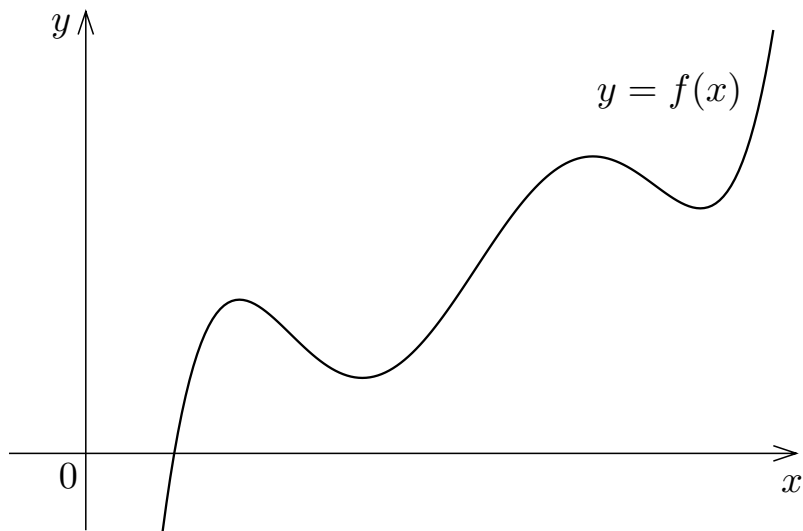
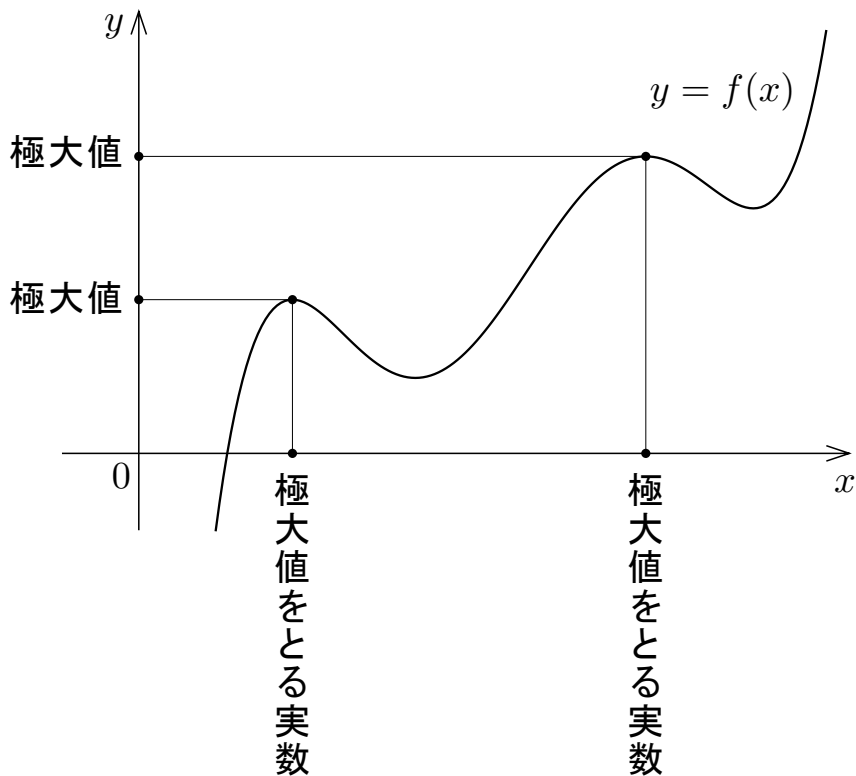


## 5.1 関数の極値

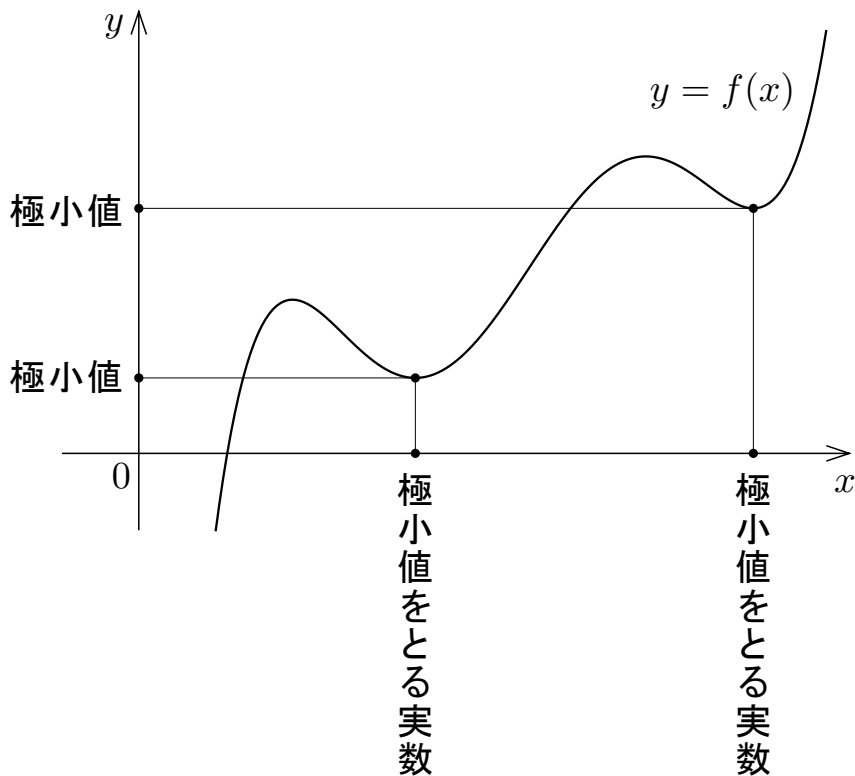
実数  $p$  のすぐ近くの  
各実数は関数  $f$  の定義  
域に属すとする.



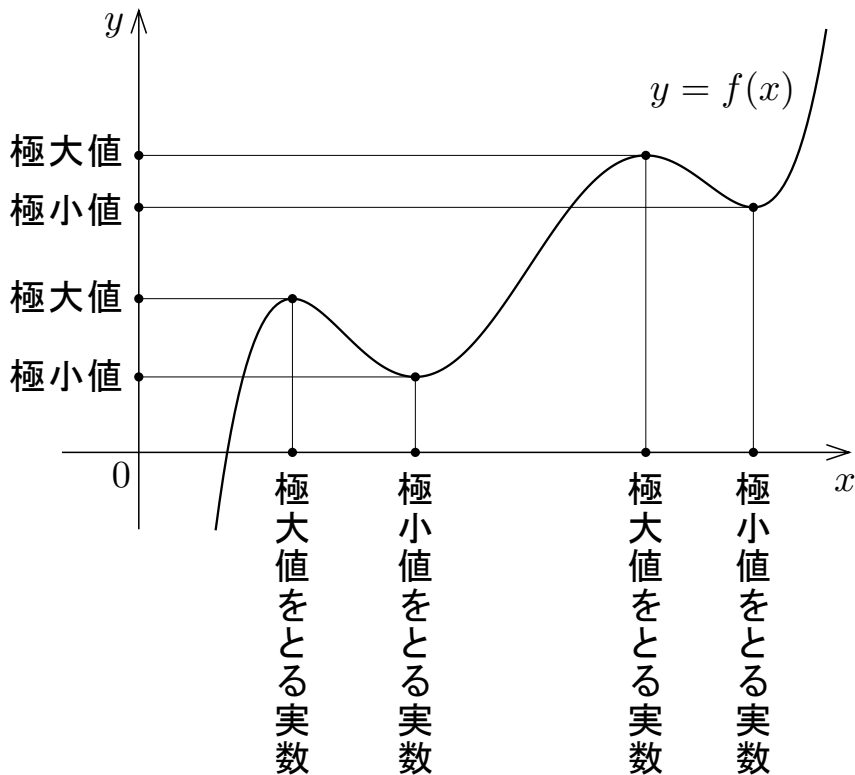
実数  $p$  のすぐ近くの  
各実数は関数  $f$  の定義  
域に属すとする.  $f$  が  
 $p$  において極大値をと  
るといふのは,  $p$  のす  
ぐ近くだけをみると  $f$   
の値が  $p$  で最大になる  
ことである.



実数  $p$  のすぐ近くの各実数は関数  $f$  の定義域に属すとする.  $f$  が  $p$  において極大値をとるといふのは,  $p$  のすぐ近くだけを見ると  $f$  の値が  $p$  で最大になることである.  $f$  が  $p$  において極小値をとるといふのは,  $p$  のすぐ近くだけを見ると  $f$  の値が  $p$  で最小になることである.



実数  $p$  のすぐ近くの各実数は関数  $f$  の定義域に属すとする.  $f$  が  $p$  において極大値をとるといふのは,  $p$  のすぐ近くだけを見ると  $f$  の値が  $p$  で最大になることである.  $f$  が  $p$  において極小値をとるといふのは,  $p$  のすぐ近くだけを見ると  $f$  の値が  $p$  で最小になることである.



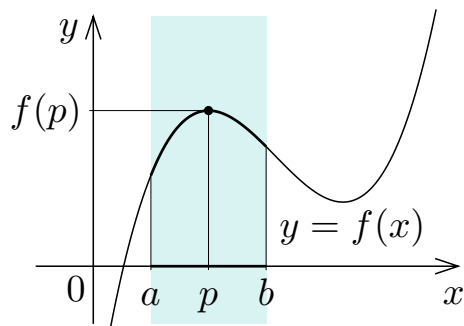
正確な定義を述べる.

正確な定義を述べる．関数  $f$  及び実数  $p$  について， $f$  が  $p$  において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである： $a < p < b$  であるある実数  $a, b$  を選ぶと， $a < x < b$  である各実数  $x$  について  $f(p) \geq f(x)$  ．

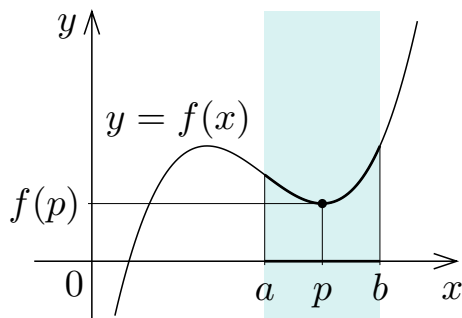
正確な定義を述べる．関数  $f$  及び実数  $p$  について， $f$  が  $p$  において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである： $a < p < b$  であるある実数  $a, b$  を選ぶと， $a < x < b$  である各実数  $x$  について  $f(p) \geq f(x)$ ． $f$  が  $p$  において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである： $a < p < b$  であるある実数  $a, b$  を選ぶと， $a < x < b$  である各実数  $x$  について  $f(p) \leq f(x)$ ．



正確な定義を述べる. 関数  $f$  及び実数  $p$  について,  $f$  が  $p$  において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである:  $a < p < b$  である実数  $a, b$  を選ぶと,  $a < x < b$  である各実数  $x$  について  $f(p) \geq f(x)$ .  $f$  が  $p$  において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである:  $a < p < b$  であるある実数  $a, b$  を選ぶと,  $a < x < b$  である各実数  $x$  について  $f(p) \leq f(x)$ .



$f$  が  $p$  において極大値をとる.  
水色の部分だけを考えると  $f$  は  $p$  において最大値をとる.



$f$  が  $p$  において極小値をとる.  
水色の部分だけを考えると  $f$  は  $p$  において最小値をとる.

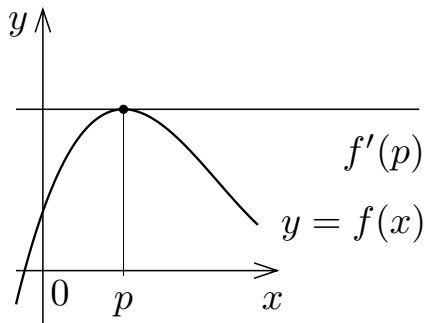
極大値と極小値を併せて極値という.

極大値と極小値を併せて極値という.

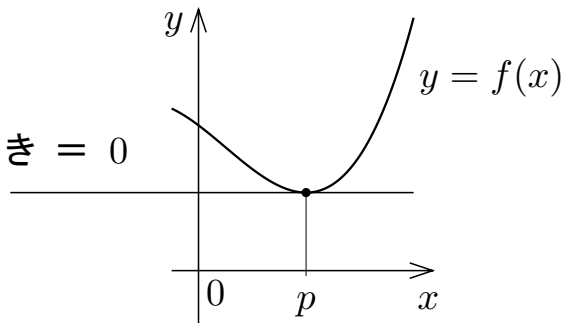
関数の最大値・最小値はあるとしても 1 つだけである. 関数の極大値・極小値は, 数多くあることがあるし, 一つもないこともある.

実数  $p$  において微分可能である関数  $f$  の微分係数  $f'(p)$  は  $f$  のグラフの点  $(p, f(p))$  における接線の傾きである.

実数  $p$  において微分可能である関数  $f$  の微分係数  $f'(p)$  は  $f$  のグラフの点  $(p, f(p))$  における接線の傾きである。関数のグラフにおいて、関数が極値をとるところで、接線は“水平”である、つまり接線の傾きは  $0$  である。

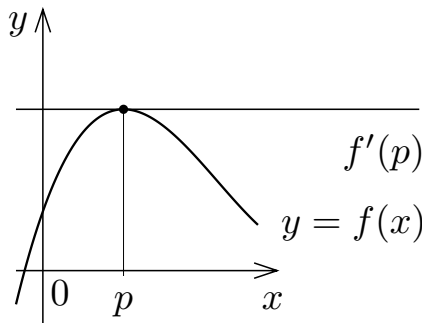


$$f'(p) = \text{接線の傾き} = 0$$

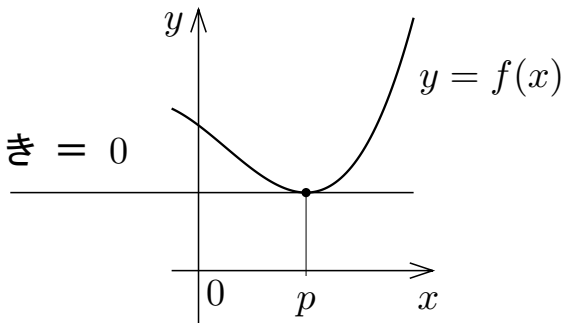


関数  $f$  が実数  $p$  において極値をとるときのグラフの状態

実数  $p$  において微分可能である関数  $f$  の微分係数  $f'(p)$  は  $f$  のグラフの点  $(p, f(p))$  における接線の傾きである。関数のグラフにおいて、関数が極値をとるところで、接線は“水平”である、つまり接線の傾きは  $0$  である。



$$f'(p) = \text{接線の傾き} = 0$$



関数  $f$  が実数  $p$  において極値をとるときのグラフの状態

このように考えると次の定理が成り立つ。

**定理** 関数  $f$  が実数  $p$  において微分可能であるとき、 $f$  が  $p$  において極値をとるならば  $f'(p) = 0$  .

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$  と定める.  
この関数  $f$  には異なる 2 個の極値がある. その 2 個の極値を求める.

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$  と定める.

この関数  $f$  には異なる 2 個の極値がある. その 2 個の極値を求める.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20 \quad \text{より} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 .$$



**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$  と定める.

この関数  $f$  には異なる 2 個の極値がある. その 2 個の極値を求める.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$  より  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ . 実数  $p$  において  $f$  が極値をとるとすると,  $f'(p) = 0$  なので,  $3p^2 - 6p - 9 = 0$ ,  $3(p+1)(p-3) = 0$ , よって  $p = 3, -1$ .

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$  と定める.

この関数  $f$  には異なる 2 個の極値がある. その 2 個の極値を求める.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$  より  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ . 実数  $p$  において  $f$  が極値をとるとすると,  $f'(p) = 0$  なので,  $3p^2 - 6p - 9 = 0$ ,  $3(p+1)(p-3) = 0$ , よって  $p = 3, -1$ . 関数  $f$  には異なる 2 個の極値があるので,  $f$  は 3 と  $-1$  とにおいて極値をとる.  $f(-1) = 25$ .  $f(3) = -7$ . 関数  $f$  の極値は 25 と  $-7$  との 2 個である. 終

**問5.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$  と定める. こ

の関数  $f$  には異なる2つの極値がある. その2個の極値を求めよ.

$f'(x) =$  . 実数  $p$  において  $f$  が極値をとるとすると,  
 $f'(p) = 0$  なので,  $= 0$ ,  $(\quad)(\quad) = 0$ ,  $p =$  または  
 $p =$  .  $f(\quad) =$  と  $f(\quad) =$  以外に  $f$  の極値は無い.  $f$  には異なる2個の極値があるので, 2個の極値は  $\quad$  と  $\quad$  とである.

**問5.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$  と定める. この関数  $f$  には異なる 2 個の極値がある. その 2 個の極値を求めよ.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ . 実数  $p$  において  $f$  が極値をとるとすると,  
 $f'(p) = 0$  なので,  $3p^2 - 4p - 4 = 0$ ,  $(\quad)(\quad) = 0$ ,  $p = \quad$  または  
 $p = \quad$ .  $f(\quad) = \quad$  と  $f(\quad) = \quad$  以外に  $f$  の極値は無い.  $f$  には異なる 2 個の極値があるので, 2 個の極値は  $\quad$  と  $\quad$  とである.

**問5.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$  と定める. この関数  $f$  には異なる2個の極値がある. その2個の極値を求めよ.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ . 実数  $p$  において  $f$  が極値をとるとすると,  
 $f'(p) = 0$  なので,  $3p^2 - 4p - 4 = 0$ ,  $(3p+2)(p-2) = 0$ ,  $p = 2$  または  
 $p = -\frac{2}{3}$ .  $f(2) = -8$  と  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27}$  以外に  $f$  の極値は無い.  $f$  には異なる2個の極値があるので, 2個の極値は  $-8$  と  $\frac{40}{27}$  とである. **終**