5.3 関数の単調増加単調減少

関数 f の定義域が区間 I を含むとする.

関数 f の定義域が区間 I を含むとする. I において f が単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$.

関数 f の定義域が区間 I を含むとする. I において f が単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$.

I において f が単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) > f(v)$.

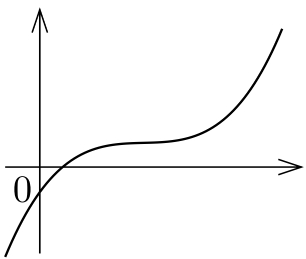
関数 f の定義域が区間 I を含むとする．I において f が単調増加であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)<f(v)$.

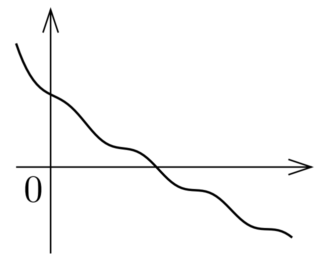
I において f が単調減少であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u<v$ ならば $f(u)>f(v)$.

感覚的にいうと，関数 f が単調増加である範囲では f のグラフは右上がりになり，f が単調減少である範囲では f のグラフは右下がりになる．

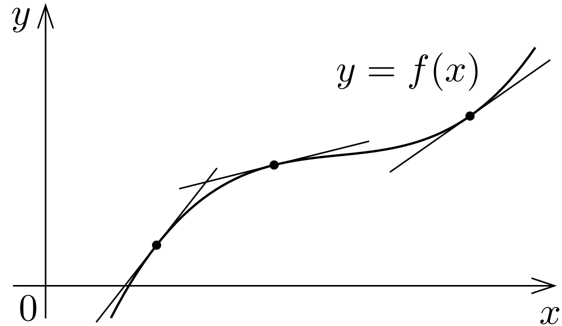


単調増加である関数のグラフの例

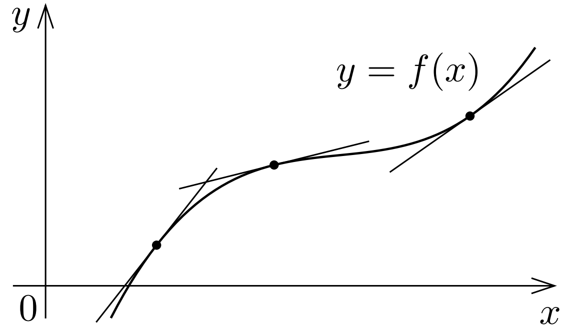


単調減少である関数のグラフの例

微分可能な関数 f について，$f'(x) > 0$ のとき，f のグラフの接線は，傾きが正なので，右上がりの直線である；



微分可能な関数 f について，$f'(x) > 0$ のとき，f のグラフの接線は，傾きが正なので，右上がりの直線である；このとき，右図のように，関数 f のグラフも右上がりになる，つまり f は単調増加であるように思える．



区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする．

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする.

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする.

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x)>0$ とする．

区間 I の実数 u,v について $u<v$ とする．f は区間 $[u,v]$ で微分可能なので，平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v)-f(u) = f'(w)(v-u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする．

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする．f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので，平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので，w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$ ．

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする．

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする．f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので，平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので，w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$ ．更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので，

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0 \ ,$$

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする．

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする．f は区間 $[u,v]$ で微分可能なので，平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v-u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので，w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$ ．更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので，

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v-u) > 0 \ ,$$

従って $f(u) < f(v)$ ．

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする．

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする．f は区間 $[u,v]$ で微分可能なので，平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v-u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので，w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$ ．更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので，

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v-u) > 0 \ ,$$

従って $f(u) < f(v)$ ．

$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$ なので，I において f は単調増加である．

区間 I で関数 f が微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x)>0$ とする．

区間 I の実数 u,v について $u<v$ とする．f は区間 $[u,v]$ で微分可能なので，平均値の定理より，次のような実数 w がある：

$$f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)\ , \qquad u<w<v\ .$$

u,v は区間 I に属しかつ $u<w<v$ なので，w は区間 I に属す；よって $f'(w)>0$．更に $u<v$ より $v-u>0$ なので，

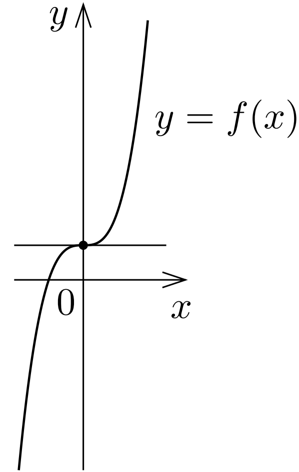
$$f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)>0\ ,$$

従って $f(u)<f(v)$ ．

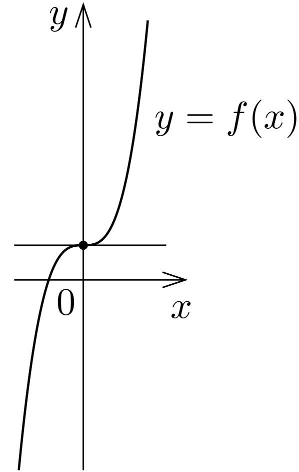
$u<v$ ならば $f(u)<f(v)$ なので，I において f は単調増加である．

このように，I の各実数 x について $f'(x)>0$ ならば，I において f は単調増加である．

例として実数全体を定義域とする関数 $f(x) = x^3 + 1$ を考える． $f'(x) = 3x^2$ であるから $f'(0) = 0$ であるが，右のグラフから分かるように， f は実数全体で単調増加である．

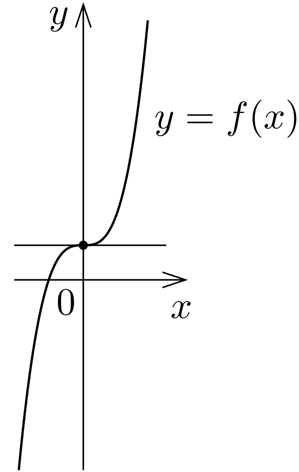


　例として実数全体を定義域とする関数 $f(x)=x^3+1$ を考える． $f'(x)=3x^2$ であるから $f'(0)=0$ であるが，右のグラフから分かるように， f は実数全体で単調増加である．



　このように，区間 I で微分可能な関数 f について， I の中に一つや二つ $f'(p)=0$ である実数 p があっても，それ以外の各実数 x で $f'(x)>0$ ならば， f は I において単調増加である．

例として実数全体を定義域とする関数 $f(x)=x^3+1$ を考える. $f'(x)=3x^2$ であるから $f'(0)=0$ であるが, 右のグラフから分かるように, f は実数全体で単調増加である.



このように, 区間 I で微分可能な関数 f について, I の中に一つや二つ $f'(p)=0$ である実数 p があっても, それ以外の各実数 x で $f'(x)>0$ ならば, f は I において単調増加である.

定理　区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

(1)　I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x)>0$ ならば, I において f は単調増加である.

(2)　I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x)<0$ ならば, I において f は単調減少である.

実数 p において微分可能な関数 f について，前の頁の例のように，$f'(p) = 0$ であっても f が p において極値をとらないこともある．

実数 p において微分可能な関数 f について，前の頁の例のように，$f'(p)=0$ であっても f が p において極値をとらないこともある．なので，

$$f \text{ が } p \text{ において極値をとるならば } f'(p)=0$$

であるが，

$$f'(p)=0 \text{ だからといって } f \text{ が } p \text{ において極値をとるとは限らない．}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の
値の増減の様子を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+9x-6$ と定める. 関数 f の

値の増減の様子を調べる.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-6\right)=x^2-6x+9\\
&=(x-3)^2 \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める．関数 f の

値の増減の様子を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6\right) = x^2 - 6x + 9$$
$$= (x-3)^2 \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $(x-3)^2 = 0$ なので

$x = 3$ ．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+9x-6$ と定める．関数 f の

値の増減の様子を調べる．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-6\right)=x^2-6x+9 \\ &= (x-3)^2 \ . \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると， $(x-3)^2=0$ なので

$x=3$ ． $x\neq 3$ のとき， $x-3\neq 0$ なので

$f'(x)=(x-3)^2>0$ ．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の

値の増減の様子を調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6\right) = x^2 - 6x + 9$$
$$= (x-3)^2 \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $(x-3)^2 = 0$ なので

$x = 3$. $x \neq 3$ のとき, $x - 3 \neq 0$ なので

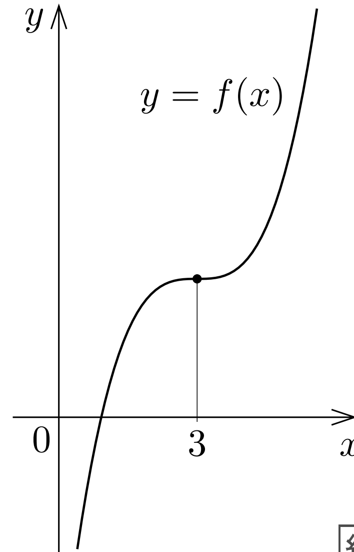
$f'(x) = (x-3)^2 > 0$. 従って関数 f は実数全体

において単調増加である.

例 実数全体を定義域とする関数 f を
$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める．関数 f の値の増減の様子を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6\right) = x^2 - 6x + 9$$
$$= (x-3)^2 \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $(x-3)^2 = 0$ なので
$x = 3$ ． $x \neq 3$ のとき， $x - 3 \neq 0$ なので
$f'(x) = (x-3)^2 > 0$ ．従って関数 f は実数全体において単調増加である．



終

$\boxed{問5.3.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定める．関数 g の値の増減の様子を調べよ．

$g'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad = (\qquad\quad)^2$．$g'(x) = 0$ とすると，$(\qquad\quad)^2 = 0$ なので $x = \qquad$．$x \neq \qquad$ のとき，$\qquad\qquad \neq 0$ なので $g'(x) = (\qquad\quad)^2 \qquad$．故に関数 g は　　　　　　　においで　　　　　　　である．

$\boxed{\text{問}5.3.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定める．関数 g の値の増減の様子を調べよ．

$g'(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$ ． $g'(x) = 0$ とすると， $(3x-2)^2 = 0$ なので $x = \dfrac{2}{3}$ ． $x \neq$ 　　のとき， 　　　　$\neq 0$ なので $g'(x) = ($ 　　　$)^2$ 　　． 故に関数 g は 　　　　　　において 　　　　　　である．

$\boxed{\text{問}5.3.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定める．関数 g の値の増減の様子を調べよ．

　$g'(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$ ． $g'(x) = 0$ とすると， $(3x-2)^2 = 0$ なので $x = \dfrac{2}{3}$ ． $x \neq \dfrac{2}{3}$ のとき， $3x - 2 \neq 0$ なので $g'(x) = (3x-2)^2 > 0$ ．故に関数 g は実数全体において単調増加である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子を調べる．

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子を調べる．

3 次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は 2 次関数である． 2 次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないときは， $\varphi'(x)$ を表す 2 次式を平方完成する．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子を調べる．

3 次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は 2 次関数である．2 次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないときは，$\varphi'(x)$ を表す 2 次式を平方完成する．

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 5x) = 3x^2 - 8x + 6 \\
&= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 5 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\
&= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\
&= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子を調べる．

3 次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は 2 次関数である．2 次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないときは，$\varphi'(x)$ を表す 2 次式を平方完成する．

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 5x) = 3x^2 - 8x + 6 \\
&= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 5 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\
&= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\
&= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x について，$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ なので

$$\varphi'(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \ .$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子を調べる．

3 次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は 2 次関数である．2 次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないときは，$\varphi'(x)$ を表す 2 次式を平方完成する．

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 5x) = 3x^2 - 8x + 6 \\
&= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 5 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\
&= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\
&= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

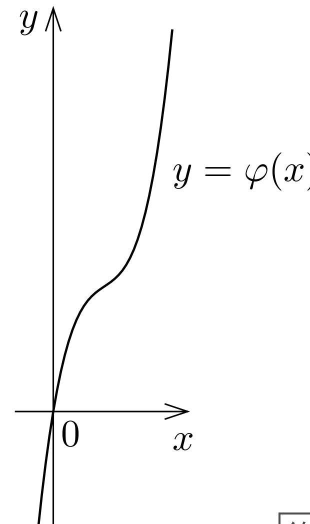
任意の実数 x について，$\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ なので

$\varphi'(x) = 3\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3} \geq \dfrac{2}{3} > 0$ ．故に φ は実数全体において単調増加である．

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-4x^2+6x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子を調べる．

3 次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は 2 次関数である．2 次方程式 $\varphi'(x)=0$ の解が実数でないときは，$\varphi'(x)$ を表す 2 次式を平方完成する．

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3-4x^2+5x) = 3x^2-8x+6 \\
&= 3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right\}+6 \\
&= 3\left\{x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-\frac{16}{3}+6 \\
&= 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$



任意の実数 x について，$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ なので

$\varphi'(x)=3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3} \geq \dfrac{2}{3} > 0$ ．故に φ は実数全体において単調増加である．

終

$\boxed{\text{問}5.3.2}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ と定める. 関数 ψ の値の増減の様子を調べよ.

$$\psi'(x) = \qquad\qquad = \left\{ \qquad\qquad \right\} + \qquad = \left(\qquad \right)^2 \qquad .$$

任意の実数 x について, $-\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 \leq 0$ なので

$$\psi'(x) = \quad \left(\qquad \right)^2 \qquad \leq \qquad .$$

故に ψ は　　　　　　において　　　　　　である.

$\boxed{\text{問}5.3.2}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ と定める．関数 ψ の値の増減の様子を調べよ．

$$\psi'(x) = -3x^2 + 4x - 2 = -3\left\{x^2 - \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} + \frac{4}{3} - 2 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \ .$$

任意の実数 x について，$-\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 \leq 0$ なので

$$\psi'(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \leq -\frac{2}{3} < 0 \ .$$

故に ψ は実数全体において単調減少である． $\boxed{\text{終}}$

関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$.

関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて $u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v とについて $u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$.

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加である.

関数 f の定義域が区間 I を含むとする．f が I において広義の単調増加であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$ ．

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$ ．

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加である．単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩い．例えば定数関数は広義の単調増加であるが単調増加ではない．

関数 f の定義域が区間 I を含むとする．f が I において広義の単調増加であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$ ．

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$ ．

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加である．単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩い．例えば定数関数は広義の単調増加であるが単調増加ではない．同様に単調減少より広義の単調減少の方が条件が緩い．

関数 f の定義域が区間 I を含むとする．f が I において広義の単調増加であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$ ．

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである：

I の任意の実数 u と v とについて　$u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$ ．

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加である．単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩い．例えば定数関数は広義の単調増加であるが単調増加ではない．同様に単調減少より広義の単調減少の方が条件が緩い．

証明は省くが次の定理が成り立つ.

定理　区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\Longleftrightarrow$ I の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

I において f が広義の単調減少 $\Longleftrightarrow$ I の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

証明は省くが次の定理が成り立つ.

定理　区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\iff$ I の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

I において f が広義の単調減少 $\iff$ I の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

区間 I において微分可能な関数 f について，I において $f'(x) \geq 0$ であれば，I において広義の単調増加であるが，I において単調増加であるとは限らない．例えば，定数関数 f について， $f'(x) = 0$ であり，f は広義の単調増加であるが，単調増加ではない.