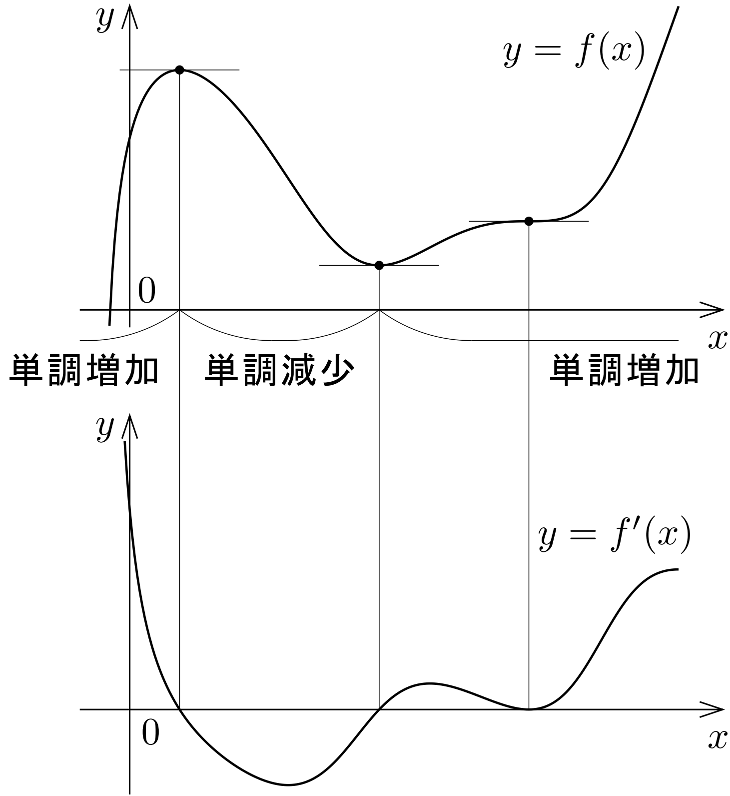
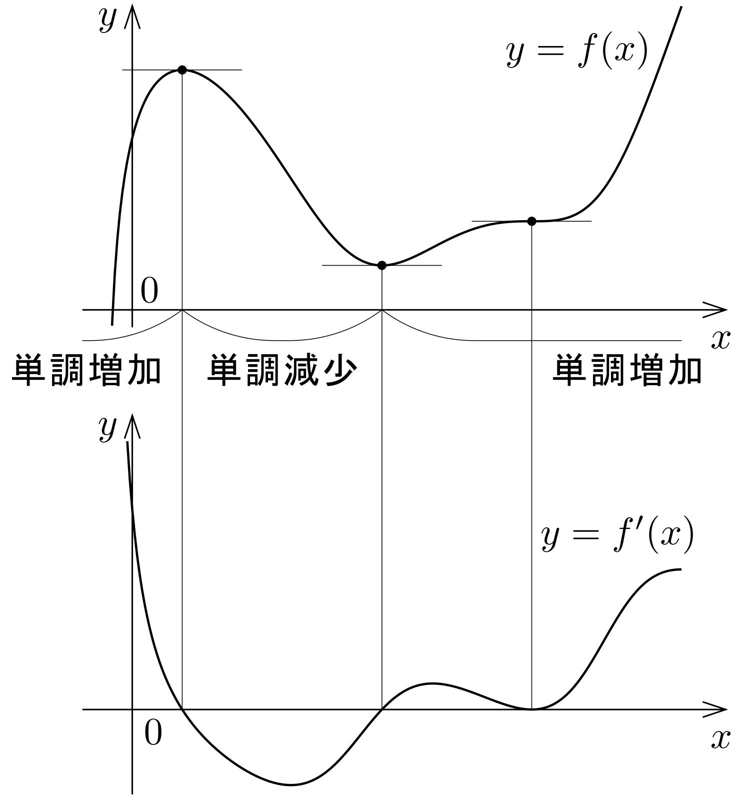
5.4 関数の値の増減

　微分可能な関数 f とその導関数 f' とについて，xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフと $y=f'(x)$ のグラフとを縦に揃えて描くと例えば右図のようになる．



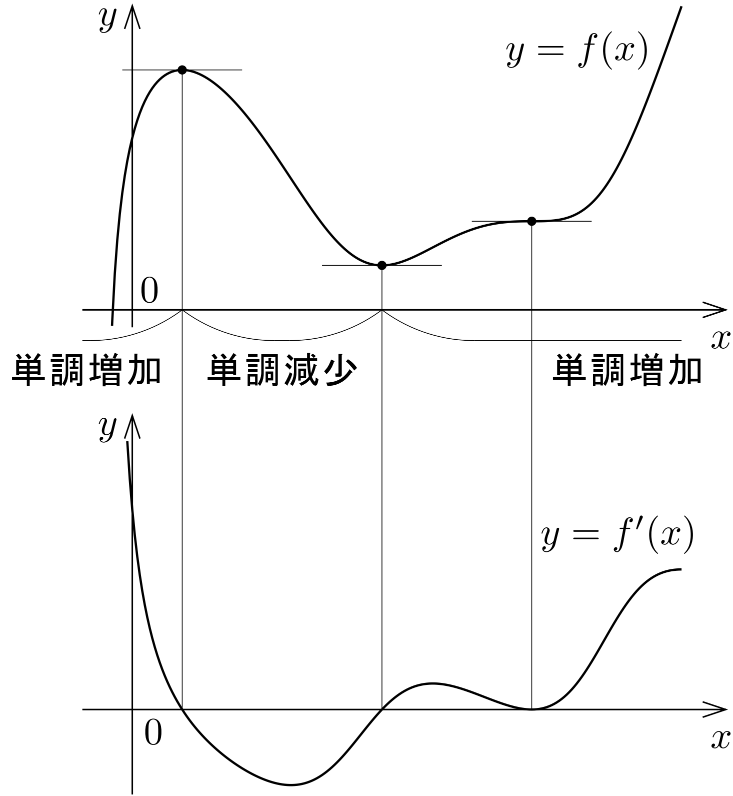
微分可能な関数 f とその導関数 f' とについて，xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフと $y=f'(x)$ のグラフとを縦に揃えて描くと例えば右図のようになる.

微分可能な関数 f が実数 p において極値をとるならば $f'(p)=0$ なので，



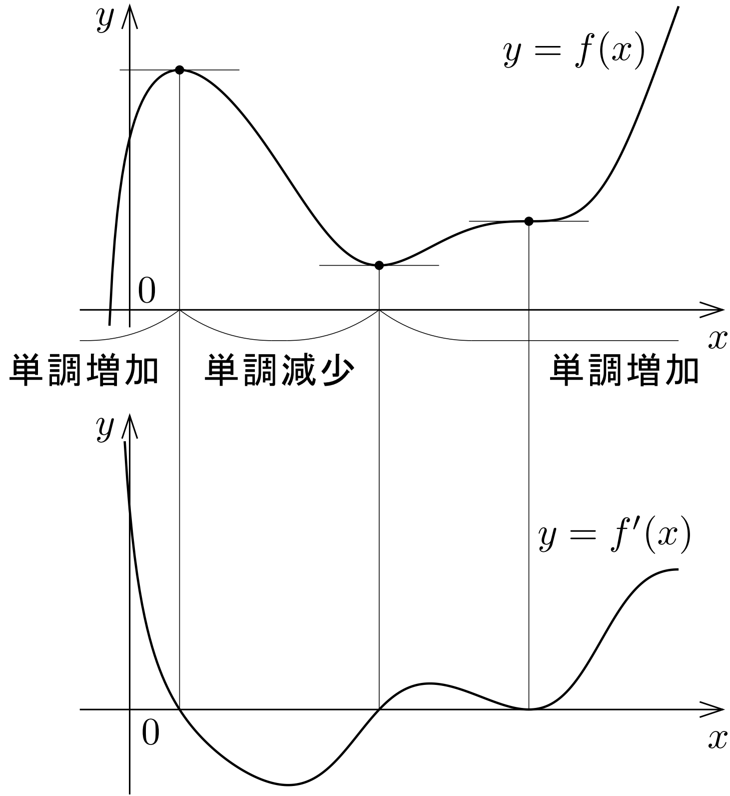
微分可能な関数 f とその導関数 f' について，xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフと $y=f'(x)$ のグラフとを縦に揃えて描くと例えば右図のようになる．

微分可能な関数 f が実数 p において極値をとるならば $f'(p)=0$ なので，f が実数 p において極値をとるような p を捜すために，$f'(p)=0$ である実数 p を求める．



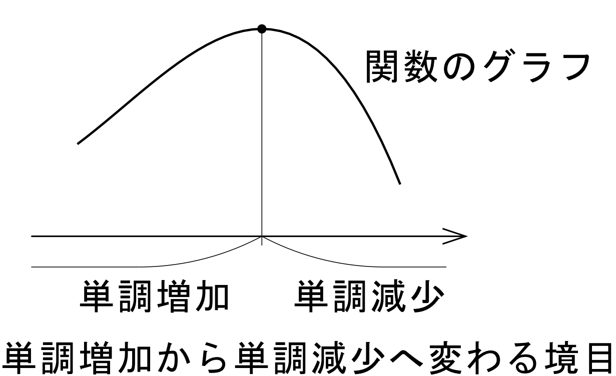
微分可能な関数 f とその導関数 f' について，xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフと $y=f'(x)$ のグラフとを縦に揃えて描くと例えば右図のようになる．

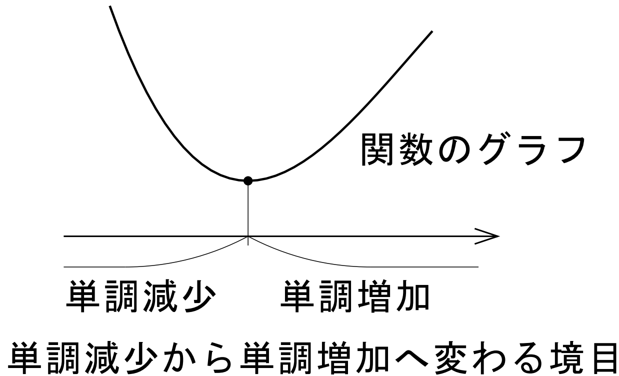
微分可能な関数 f が実数 p において極値をとるならば $f'(p)=0$ なので，f が実数 p において極値をとるような p を捜すために，$f'(p)=0$ である実数 p を求める．しかし，$f'(p)=0$ だからといって f が p において極値をとるとは限らない．



極大値をとるか極小値をとるかを判定するために次の定理を用いる.

定理　連続な関数は，独立変数の値を大きくしていくとき，
単調増加から単調減少へ変わる境目の実数において極大値をとり，
単調減少から単調増加へ変わる境目の実数において極小値をとる.





例 実数全体において微分可能な関数 f について,

$$x<7 \text{ のとき } f'(x)<0\ ,\quad x>7 \text{ のとき } f'(x)>0$$

とする.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体において微分可能な関数 f について,

$$x < 7 \text{ のとき } f'(x) < 0 \ , \quad x > 7 \text{ のとき } f'(x) > 0$$

とする．区間 $(-\infty, 7]$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x) < 0$ なので, f は区間 $(-\infty, 7]$ において単調減少である.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体において微分可能な関数 f について,

$$x < 7 \text{ のとき } f'(x) < 0 \text{ ,} \quad x > 7 \text{ のとき } f'(x) > 0$$

とする.区間 $(-\infty, 7]$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x) < 0$ なので,f は区間 $(-\infty, 7]$ において単調減少である.また,区間 $[7, \infty)$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x) > 0$ なので,f は区間 $[7, \infty)$ において単調増加である.

例 実数全体において微分可能な関数 f について，

$$x < 7 \text{ のとき } f'(x) < 0 \ , \quad x > 7 \text{ のとき } f'(x) > 0$$

とする．区間 $(-\infty, 7]$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x) < 0$ なので，f は区間 $(-\infty, 7]$ において単調減少である．また，区間 $[7, \infty)$ の中の 7 以外の各実数 x について $f'(x) > 0$ なので，f は区間 $[7, \infty)$ において単調増加である．境目の実数 7 は両方の区間に属すことに注意すること． 終

極大値・極小値を調べる問題では，通常，極大値および極小値だけでなく，極大値をとる実数および極小値をとる実数も調べること．また，極大値・極小値を調べる問題では，極大値が無いときは “ 極大値は無い ” ことを記し，極小値が無いときは “ 極小値は無い ” ことを記すこと．

例 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める. 関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる.

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$

$g'(x)=0$ とすると， $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので

$x=2$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める. 関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる.

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$

$g'(x)=0$ とすると, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので $x=2$. $0<x<2$ のときと $x>2$ のときとに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ （ $x>0$ ） と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる.

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$

$g'(x)=0$ とすると， $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので
$x=2$ ． $0<x<2$ のときと $x>2$ のとき
とに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる.

$$0<x<2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}>\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0 \ .$$

$$0<u<v \text{ ならば } \frac{1}{u}>\frac{1}{v}$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ （ $x>0$ ） と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} .$$

$g'(x)=0$ とすると， $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので
$x=2$ ． $0<x<2$ のときと $x>2$ のとき
とに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる．

$$0<x<2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}>\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0 .$$

$$x>2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}>0 .$$

$u>v>0$ ならば $\dfrac{1}{u}<\dfrac{1}{v}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$

$g'(x)=0$ とすると，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので $x=2$ ． $0<x<2$ のときと $x>2$ のときとに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる．

$$0<x<2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}>\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0 \ .$$

$$x>2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}>0 \ .$$

従って，関数 g は，区間 $(0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} .$$

$g'(x)=0$ とすると， $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので
$x=2$ ． $0<x<2$ のときと $x>2$ のとき
とに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる．

$$0<x<2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}>\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0 .$$

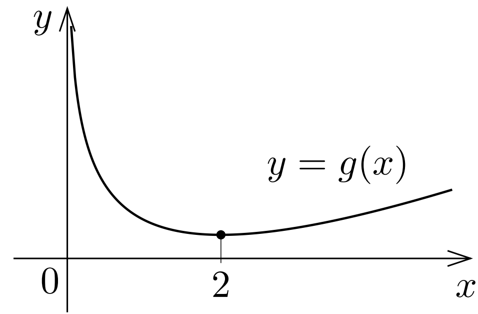
$$x>2 \text{ のとき，} \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}>0 .$$

従って，関数 g は，区間 $(0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である． $g(2)=1-\ln 2$ なので， g は 2 において極小値 $1-\ln 2$ をとる；極大値はとらない．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{x}{2}-\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}-\ln x\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x} \ .$$



$g'(x)=0$ とすると，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0$ なので $x=2$ ． $0<x<2$ のときと $x>2$ のときとに分けて $g'(x)$ の値の符号を調べる．

$$0<x<2 \text{ のとき，} \frac{1}{x}>\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0 \ .$$

$$x>2 \text{ のとき，} \frac{1}{x}<\frac{1}{2} \text{ なので } g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}>0 \ .$$

従って，関数 g は，区間 $(0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である． $g(2)=1-\ln 2$ なので，g は 2 において極小値 $1-\ln 2$ をとる；極大値はとらない． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}5.4.1}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x - 2\sqrt{x}^3$ （ $x \geq 0$ ）と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べよ．

$$f'(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \left(\qquad\qquad \right) \quad (x \geq 0) \quad .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$\left(\qquad\qquad \right) = 0$ ，$\sqrt{x} = \quad$ ，$x = \quad$ ．$0 \leq x < \quad$ のとき，$\sqrt{x} < \sqrt{\quad} = \quad$ なので $f'(x) = \left(\qquad\qquad \right) \quad 0$ ．$x > \quad$ のとき，$\sqrt{x} > \sqrt{\quad} = \quad$ なので $f'(x) = \left(\qquad\qquad \right) \quad 0$ ．従って，関数 f は，区間 $[0, \quad]$ において単調　　　であり，区間 $[\quad, \infty)$ において単調　　　である．$f(9) = 27$ なので，f は　　において極　値　　　をとる．f は極　値をとらない．

$\boxed{問 5.4.1}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x - 2\sqrt{x}^3$ （ $x \geq 0$ ）と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べよ．

$$f'(x) = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 9 - 3\sqrt{x} = 3\left(3 - \sqrt{x}\right) \quad (\ x \geq 0 \ ) \quad .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $3\left(3 - \sqrt{x}\right) = 0$ ， $\sqrt{x} = 3$ ， $x = 9$ ． $0 \leq x <$ 　 のとき， $\sqrt{x} < \sqrt{} =$ 　 なので $f'(x) =$ $\Big($ 　　　 $\Big)$ 　 0 ． $x >$ 　 のとき， $\sqrt{x} > \sqrt{} =$ 　 なので $f'(x) =$ $\Big($ 　　　 $\Big)$ 　 0 ．従って，関数 f は，区間 $[0, \ ]$ において単調　　　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　　である．

$f(9) = 27$ なので，f は　 において極　値　　　をとる．f は極　値をとらない．

$\boxed{\text{問}5.4.1}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=9x-2\sqrt{x}^3$ （ $x \geq 0$ ）と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べよ．

$$f'(x) = 9-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 9-3\sqrt{x} = 3\left(3-\sqrt{x}\right) \quad (\ x \geq 0 \ ) \quad .$$

$f'(x)=0$ とすると， $3\left(3-\sqrt{x}\right)=0$ ， $\sqrt{x}=3$ ， $x=9$ ． $0\leq x<9$ のとき， $\sqrt{x}<\sqrt{9}=3$ なので $f'(x)=3\left(3-\sqrt{x}\right)>0$ ． $x>9$ のとき， $\sqrt{x}>\sqrt{9}=3$ なので $f'(x)=3\left(3-\sqrt{x}\right)<0$ ．従って，関数 f は，区間 $[0,\ ]$ において単調　　　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　　である．$f(9)=27$ なので，f は　　において極　値　　　をとる．f は極　値をとらない．

$\boxed{問5.4.1}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=9x-2\sqrt{x}^3$ ($x \geq 0$) と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べよ．

$$f'(x) = 9-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 9-3\sqrt{x} = 3\left(3-\sqrt{x}\right) \quad (x \geq 0) \quad .$$

$f'(x)=0$ とすると， $3\left(3-\sqrt{x}\right)=0$ ， $\sqrt{x}=3$ ， $x=9$ ． $0 \leq x < 9$ のとき， $\sqrt{x} < \sqrt{9} = 3$ なので $f'(x)=3\left(3-\sqrt{x}\right) > 0$ ． $x > 9$ のとき， $\sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$ なので $f'(x)=3\left(3-\sqrt{x}\right) < 0$ ．従って，関数 f は，区間 $[0,9]$ において単調増加であり，区間 $[9,\infty)$ において単調減少である．$f(9)=27$ なので，f は 9 において極大値 27 をとる．f は極小値をとらない．

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると， $5 - e^x = 0$ なので $e^x = 5$ ，従って $x = \ln 5$ ．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると， $5 - e^x = 0$ なので $e^x = 5$ ， 従って $x = \ln 5$ ．

$x < \ln 5$ のとき， $e^x < e^{\ln 5} = 5$ なので $\varphi'(x) = 5 - e^x > 0$ ．

$u < v$ ならば $e^u < e^v$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると， $5 - e^x = 0$ なので $e^x = 5$ ，従って $x = \ln 5$ ．

$x < \ln 5$ のとき， $e^x < e^{\ln 5} = 5$ なので $\varphi'(x) = 5 - e^x > 0$ ．

$x > \ln 5$ のとき， $e^x > e^{\ln 5} = 5$ なので $\varphi'(x) = 5 - e^x < 0$ ．

$u > v$ ならば $e^u > e^v$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると，$5 - e^x = 0$ なので $e^x = 5$ ，従って $x = \ln 5$ ．

$$x < \ln 5 \ \text{のとき，} \ e^x < e^{\ln 5} = 5 \ \text{なので} \ \varphi'(x) = 5 - e^x > 0 \ .$$

$$x > \ln 5 \ \text{のとき，} \ e^x > e^{\ln 5} = 5 \ \text{なので} \ \varphi'(x) = 5 - e^x < 0 \ .$$

従って，関数 φ は，区間 $(-\infty, \ln 5]$ において単調増加であり，区間 $[\ln 5, \infty)$ において単調減少である．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると， $5 - e^x = 0$ なので $e^x = 5$ ，従って $x = \ln 5$ ．

$$x < \ln 5 \text{ のとき，} \ e^x < e^{\ln 5} = 5 \text{ なので } \varphi'(x) = 5 - e^x > 0 \ .$$

$$x > \ln 5 \text{ のとき，} \ e^x > e^{\ln 5} = 5 \text{ なので } \varphi'(x) = 5 - e^x < 0 \ .$$

従って，関数 φ は，区間 $(-\infty, \ln 5]$ において単調増加であり，区間 $[\ln 5, \infty)$ において単調減少である．

$$\varphi(\ln 5) = 5\ln 5 - e^{\ln 5} = 5\ln 5 - 5 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 5x - e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x - e^x) = 5 - e^x \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると，$5 - e^x = 0$ なので $e^x = 5$，従って $x = \ln 5$ ．

$x < \ln 5$ のとき，$e^x < e^{\ln 5} = 5$ なので $\varphi'(x) = 5 - e^x > 0$ ．

$x > \ln 5$ のとき，$e^x > e^{\ln 5} = 5$ なので $\varphi'(x) = 5 - e^x < 0$ ．

従って，関数 φ は，区間 $(-\infty, \ln 5]$ において単調増加であり，区間 $[\ln 5, \infty)$ において単調減少である．

$$\varphi(\ln 5) = 5\ln 5 - e^{\ln 5} = 5\ln 5 - 5 \ .$$

φ は，$\ln 5$ において極大値 $5\ln 5 - 5$ をとり，極小値はとらない．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=5x-e^x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べる．

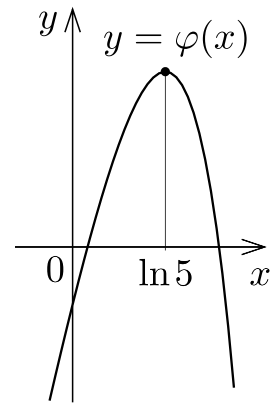
$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(5x-e^x) = 5-e^x \ .$$

$\varphi'(x)=0$ とすると，$5-e^x=0$ なので $e^x=5$，従って $x=\ln 5$ ．

$$x<\ln 5 \text{ のとき，} e^x<e^{\ln 5}=5 \text{ なので } \varphi'(x)=5-e^x>0 \ .$$

$$x>\ln 5 \text{ のとき，} e^x>e^{\ln 5}=5 \text{ なので } \varphi'(x)=5-e^x<0 \ .$$

従って，関数 φ は，区間 $(-\infty,\ln 5]$ において単調増加であり，区間 $[\ln 5,\infty)$ において単調減少である．



$$\varphi(\ln 5) = 5\ln 5 - e^{\ln 5} = 5\ln 5 - 5 \ .$$

φ は，$\ln 5$ において極大値 $5\ln 5-5$ をとり，極小値はとらない．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.4.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = x\ln x - 3x$ （ $x>0$ ）と定めます．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べよ．

$$\psi'(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad (\ x > 0\ ) \quad .$$

$\psi'(x) = 0$ とすると， $\qquad\qquad = 0$ ， $\ln x = \quad$ ，よって $x = \quad$ ． $0 < x < \quad$ のとき， $\ln x < \qquad = \quad$ なので $\psi'(x) = \qquad\qquad 0$ ． $x > \quad$ のとき， $\ln x > \qquad = \quad$ なので $\psi'(x) = \qquad\qquad 0$ ．関数 ψ は，区間 $(0, \quad]$ において単調　　　であり，区間 $[\quad ,\infty)$ において単調　　　である．

$$\psi(e^2) = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad .$$

ψ は e^2 において極　値　　　をとる． ψ は極　値をとらない．

$\boxed{問 5.4.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = x\ln x - 3x$ ($x > 0$) と定めます．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べよ．

$$\psi'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} - 3 = \ln x - 2 \quad (\ x > 0 \ ) \quad .$$

$\psi'(x) = 0$ とすると， $\ln x - 2 = 0$ ， $\ln x = 2$ ，よって $x = e^2$ ． $0 < x <$ 　のとき， $\ln x <$ 　 $=$ 　なので $\psi'(x) =$ 　 0 ． $x >$ 　のとき， $\ln x >$ 　 $=$ 　なので $\psi'(x) =$ 　 0 ．関数 ψ は，区間 $(0,$ 　$]$ において単調　であり，区間 $[$ 　$,\infty)$ において単調　である．

$$\psi(e^2) = \qquad = \qquad = \qquad .$$

ψ は e^2 において極　値　をとる． ψ は極　値をとらない．

$\boxed{\text{問}5.4.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=x\ln x-3x$ （ $x>0$ ）と定めます．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べよ．

$$\psi'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}-3=\ln x-2 \quad (x>0) \quad .$$

$\psi'(x)=0$ とすると， $\ln x-2=0$ ， $\ln x=2$ ，よって $x=e^2$ ． $0<x<e^2$ のとき， $\ln x<\ln e^2=2$ なので $\psi'(x)=\ln x-2<0$ ． $x>e^2$ のとき， $\ln x>\ln e^2=2$ なので $\psi'(x)=\ln x-2>0$ ．関数 ψ は，区間 $(0,\quad]$ において単調　　　であり，区間 $[\quad,\infty)$ において単調　　　である．

$$\psi(e^2)= \qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad .$$

ψ は e^2 において極　値　　　をとる． ψ は極　値をとらない．

$\boxed{問 5.4.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = x\ln x - 3x$ ($x > 0$) と定めます. 関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べよ.

$$\psi'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} - 3 = \ln x - 2 \quad (\ x > 0 \ ) \quad .$$

$\psi'(x) = 0$ とすると, $\ln x - 2 = 0$, $\ln x = 2$, よって $x = e^2$. $0 < x < e^2$ のとき, $\ln x < \ln e^2 = 2$ なので $\psi'(x) = \ln x - 2 < 0$. $x > e^2$ のとき, $\ln x > \ln e^2 = 2$ なので $\psi'(x) = \ln x - 2 > 0$. 関数 ψ は, 区間 $(0,e^2]$ において単調減少であり, 区間 $[e^2,\infty)$ において単調増加である.

$$\psi(e^2) = e^2\ln e^2 - 3e^2 = 2e^2 - 3e^2 = -e^2 \ .$$

ψ は e^2 において極小値 $-e^2$ をとる. ψ は極大値をとらない. $\boxed{終}$

関数の値の増減及び極値を調べるために，増減表といわれる表を作ることがある．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

まず $f(x)$ を微分する．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

まず $f(x)$ を微分する．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right) = x^2-6x+5 = (x-1)(x-5) \ .$$

$f'(x)=0$ とすると， $(x-1)(x-5)=0$ なので $x=1,5$ ．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる.

まず $f(x)$ を微分する.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right) = x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)\ .$$

$f'(x)=0$ とすると， $(x-1)(x-5)=0$ なので $x=1,5$ ． $x<1$ のときと $x=1$ のときと $1<x<5$ のときと $x=5$ のときと $x>5$ のときとに分けて $f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

まず $f(x)$ を微分する．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right) = x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)\ .$$

$f'(x)=0$ とすると， $(x-1)(x-5)=0$ なので $x=1,5$ ． $x<1$ のときと $x=1$ のときと $1<x<5$ のときと $x=5$ のときと $x>5$ のときとに分けて $f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる．

$x<1$ のとき， $x-5<x-1<0$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$ ；

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

　まず $f(x)$ を微分する．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right) = x^2-6x+5 = (x-1)(x-5) \ .$$

$f'(x)=0$ とすると，$(x-1)(x-5)=0$ なので $x=1,5$ ．$x<1$ のときと $x=1$ のときと $1<x<5$ のときと $x=5$ のときと $x>5$ のときとに分けて $f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる．

$x<1$ のとき，$x-5<x-1<0$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$ ；

$1<x<5$ のとき，$x-5<0<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)<0$ ；

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ と定める．関数 f の値の増減の様子及び f の極値を調べる．

まず $f(x)$ を微分する．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$(x-1)(x-5) = 0$ なので $x = 1, 5$ ．$x < 1$ のときと $x = 1$ のときと $1 < x < 5$ のときと $x = 5$ のときと $x > 5$ のときとに分けて $f'(x) = (x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる．

$$x < 1 \text{ のとき，} x-5 < x-1 < 0 \text{ なので } f'(x) = (x-1)(x-5) > 0 \ ;$$
$$1 < x < 5 \text{ のとき，} x-5 < 0 < x-1 \text{ なので } f'(x) = (x-1)(x-5) < 0 \ ;$$
$$x > 5 \text{ のとき，} 0 < x-5 < x-1 \text{ なので } f'(x) = (x-1)(x-5) > 0 \ .$$

$f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる.

$x<1$ のとき, $x-5<x-1<0$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$;

$1<x<5$ のとき, $x-5<0<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)<0$;

$x>5$ のとき, $0<x-5<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$.

更に, $f(1)=\dfrac{7}{3}$, $f(5)=-\dfrac{25}{3}$.

$f'(x) = (x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる.

$x < 1$ のとき, $x-5 < x-1 < 0$ なので $f'(x) = (x-1)(x-5) > 0$;

$1 < x < 5$ のとき, $x-5 < 0 < x-1$ なので $f'(x) = (x-1)(x-5) < 0$;

$x > 5$ のとき, $0 < x-5 < x-1$ なので $f'(x) = (x-1)(x-5) > 0$.

更に, $f(1) = \dfrac{7}{3}$, $f(5) = -\dfrac{25}{3}$. これらのことを表にする.

x の値	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
$x-1$ の値の符号 $x-5$ の値の符号					
$f'(x) = (x-1)(x-5)$ の値の符号					
$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ の値					

$f'(x) = (x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる.

$x < 1$ のとき, $x-5 < x-1 < 0$ なので $f'(x) = (x-1)(x-5) > 0$;

$1 < x < 5$ のとき, $x-5 < 0 < x-1$ なので $f'(x) = (x-1)(x-5) < 0$;

$x > 5$ のとき, $0 < x-5 < x-1$ なので $f'(x) = (x-1)(x-5) > 0$.

更に, $f(1) = \dfrac{7}{3}$, $f(5) = -\dfrac{25}{3}$. これらのことを表にする.

x の値	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
$x-1$ の値の符号 $x-5$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x) = (x-1)(x-5)$ の値の符号					
$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ の値					

$f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる.

$x<1$ のとき, $x-5<x-1<0$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$;

$1<x<5$ のとき, $x-5<0<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)<0$;

$x>5$ のとき, $0<x-5<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$.

更に, $f(1)=\dfrac{7}{3}$, $f(5)=-\dfrac{25}{3}$. これらのことを表にする.

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<5$	$x=5$	$5<x$
$x-1$ の値の符号 $x-5$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ の値					

$f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号を調べる.

$x<1$ のとき, $x-5<x-1<0$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$;

$1<x<5$ のとき, $x-5<0<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)<0$;

$x>5$ のとき, $0<x-5<x-1$ なので $f'(x)=(x-1)(x-5)>0$.

更に, $f(1)=\dfrac{7}{3}$, $f(5)=-\dfrac{25}{3}$. これらのことを表にする. $f'(x)$ の値の符号と $f(x)$ の値の増減の状態とを書き込んだ次のような表を増減表という：ここで, 右上向きの矢印 $\nearrow$ は単調増加の状態を表し, 右下向きの矢印 $\searrow$ は単調減少の状態を表す.

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<5$	$x=5$	$5<x$
$x-1$ の値の符号 $x-5$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ の値	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{25}{3}$	$\nearrow$

この増減表を次のように略す.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$x-1$ $x-5$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{25}{3}$	$\nearrow$

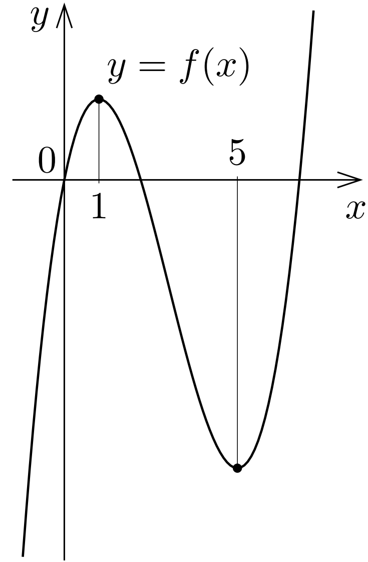
この増減表を次のように略す.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$x-1$ $x-5$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{25}{3}$	$\nearrow$

増減表から次のことが分かる: 関数 f は, 区間 $(-\infty,1]$ において単調増加であり, 区間 $[1,5]$ において単調減少であり, 区間 $[5,\infty)$ において単調増加である.

この増減表を次のように略す.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$x-1$ $x-5$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$f'(x)=(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{25}{3}$	$\nearrow$



増減表から次のことが分かる：関数 f は，区間 $(-\infty,1]$ において単調増加であり，区間 $[1,5]$ において単調減少であり，区間 $[5,\infty)$ において単調増加である．また，f は，1 において極大値 $\dfrac{7}{3}$ をとり，5 において極小値 $-\dfrac{25}{3}$ をとる．

終

$\boxed{問5.4.3}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べよ．

$\varphi'(x) =$

$= (\qquad)(\qquad)$.

$\varphi'(x) = 0$ とすると，

$(\qquad)(\qquad) = 0$ なので

$x = \quad , \quad .$ 関数 φ は，区間 $\left(-\infty, \quad \right]$ において単調　　であり，区間 $\left[\quad , \quad \right]$ において単調　　であり，区間 $[\quad ,\infty)$ において単調　　である．また，φ は，　において極大値　　をとり，　において極小値　　をとる．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x) = (\qquad)(\qquad)$					
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$					

$\boxed{\text{問}5.4.3}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べよ．

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$
$$= (3x-1)(x-3)\ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると，

$(3x-1)(x-3) = 0$ なので

$x = \dfrac{1}{3}, 3$ ．関数 φ は，区間 $\left(-\infty,\ \ \right]$ において単調　　であり，区間 $\left[\ \ ,\ \ \right]$ において単調　　であり，区間 $[\ \ , \infty)$ において単調　　である．また，φ は，　において極大値　　をとり，　において極小値　　をとる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$3x-1$ $x-3$					
$f'(x) = (3x-1)(x-1)$					
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$					

$\boxed{\text{問}5.4.3}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$ と定める. 関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べよ.

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$
$$= (3x-1)(x-3)\ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると, $(3x-1)(x-3) = 0$ なので $x = \dfrac{1}{3}, 3$. 関数 φ は, 区間 $\left(-\infty,\quad\right]$ において単調　　であり, 区間 $\left[\quad,\quad\right]$ において単調　　であり, 区間 $[\quad,\infty)$ において単調　　である. また, φ は, 　において極大値　　をとり, 　において極小値　　をとる.

x	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$3x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x) = (3x-1)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$					

$\boxed{\text{問}5.4.3}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-5x^2+3x$ と定める．関数 φ の値の増減の様子及び φ の極値を調べよ．

$$\varphi'(x)=3x^2-10x+3$$
$$=(3x-1)(x-3)\ .$$

$\varphi'(x)=0$ とすると，$(3x-1)(x-3)=0$ なので $x=\dfrac{1}{3},3$ ．関数 φ は，区間 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$ において単調増加であり，区間 $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．また，φ は，$\dfrac{1}{3}$ において極大値 $\dfrac{13}{27}$ をとり，3 において極小値 -9 をとる．$\boxed{\text{終}}$

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$3x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)=(3x-1)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=x^3-5x^2+3x$	$\nearrow$	$\frac{13}{27}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x$ （ $x > 0$ ）と定める．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=5x-\frac{1}{2}x^2-4\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\left(5x-\frac{1}{2}x^2-4\ln x\right)=5-x-\frac{4}{x}=-\frac{x^2-5x+4}{x}\\ &= -\frac{(x-1)(x-4)}{x}\ .\end{aligned}$$

例 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=5x-\dfrac{1}{2}x^2-4\ln x$ （ $x>0$ ）と定める．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べる．

　区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\left(5x-\frac{1}{2}x^2-4\ln x\right)=5-x-\frac{4}{x}=-\frac{x^2-5x+4}{x}$$
$$=-\frac{(x-1)(x-4)}{x}\ .$$

$\psi'(x)=0$ とすると， $-\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}=0$ （ $x>0$ ）なので $x=1,4$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=5x-\dfrac{1}{2}x^2-4\ln x$ ($x>0$) と定める．関数 ψ の値の増減の様子及び ψ の極値を調べる．

区間 $(0,\infty)$ の各実数 x について

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\left(5x-\frac{1}{2}x^2-4\ln x\right)=5-x-\frac{4}{x}=-\frac{x^2-5x+4}{x}$$
$$=-\frac{(x-1)(x-4)}{x} \ .$$

$\psi'(x)=0$ とすると， $-\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}=0$ ($x>0$) なので $x=1,4$ ．

更に，

$$\psi(1)=\frac{9}{2}\ , \qquad \psi(4)=12-4\ln 4\ .$$

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$						
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$						
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$						

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$						
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$						

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$						

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$	値なし	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$12-4\ln 4$	$\searrow$

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$	値なし	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$12 - 4\ln 4$	$\searrow$

この増減表より，関数 ψ は，区間 $(0, 1]$ において単調減少であり，区間 $[1, 4]$ において単調増加であり，区間 $[4, \infty)$ において単調減少である.

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

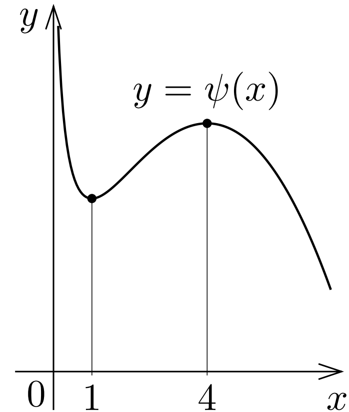
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$	値なし	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$12-4\ln 4$	$\searrow$

この増減表より，関数 ψ は，区間 $(0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,4]$ において単調増加であり，区間 $[4,\infty)$ において単調減少である．また，ψ は，1 において極小値 $\dfrac{9}{2}$ をとり，4 において極大値 $12-4\ln 4$ をとる．

$$\psi'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x} \quad .$$

増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$ $x-4$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$\psi'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-4)}{x}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi(x) = 5x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4\ln x$	値なし	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$12-4\ln 4$	$\searrow$



この増減表より, 関数 ψ は, 区間 $(0,1]$ において単調減少であり, 区間 $[1,4]$ において単調増加であり, 区間 $[4,\infty)$ において単調減少である. また, ψ は, 1 において極小値 $\dfrac{9}{2}$ をとり, 4 において極大値 $12-4\ln 4$ をとる. 終

問5.4.4 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{3}{x}+4\ln x-x$ （ $x>0$ ）と定めます．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べよ．

$$g'(x)= \qquad\qquad = -\frac{\qquad}{\qquad} = -\frac{(\qquad)(\qquad)}{\qquad} \quad (\ x>0\ ).$$

$g'(x)=0$ とすると， $-\dfrac{(\qquad)(\qquad)}{\qquad}=0$ なので $x=\quad,\quad$.

x	0	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$g'(x)=-\dfrac{(\qquad)(\qquad)}{\qquad}$						
$g(x)=\dfrac{3}{x}+4\ln x-x$						

$\boxed{\text{問}5.4.4}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \dfrac{3}{x} + 4\ln x - x$ （ $x > 0$ ） と定めます. 関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べよ.

$$g'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} - 1 = -\frac{x^2-4x+3}{x^2} = -\frac{(x-1)(x-3)}{x^2} \qquad (\ x > 0 \ ) \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると， $-\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2} = 0$ なので $x = 1, 3$.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x-1$ $x-3$						
$g'(x) = -\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2}$	値なし					
$g(x) = \dfrac{3}{x} + 4\ln x - x$	値なし					

$\boxed{\text{問}5.4.4}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{3}{x}+4\ln x-x$ （ $x>0$ ） と定めます．関数 g の値の増減の様子及び g の極値を調べよ．

$$g'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}-1=-\frac{x^2-4x+3}{x^2}=-\frac{(x-1)(x-3)}{x^2} \qquad (\ x>0\ )\ .$$

$g'(x)=0$ とすると， $-\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2}=0$ なので $x=1,3$ ．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)=-\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)=\dfrac{3}{x}+4\ln x-x$	値なし	$\searrow$	2	$\nearrow$	$4\ln 3-2$	$\searrow$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x-1$ $x-3$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$g'(x)=-\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2}$	値なし	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)=\dfrac{3}{x}+4\ln x-x$	値なし	$\searrow$	2	$\nearrow$	$4\ln 3-2$	$\searrow$

関数 g は，区間 $(0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,3]$ において単調増加であり，区間 $[3,\infty)$ において単調減少である． $g(1)=2$ ，$g(3)=4\ln 3-2$ ．
g は，1 において極小値 2 をとり，3 において極大値 $4\ln 3-2$ をとる． $\boxed{\text{終}}$