5.5 関数の最大値最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる.

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \text{ .}$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という．

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \ .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) \ .$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \text{ .}$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) \text{ .}$$

関数の最大値・最小値は，各々，あるとしても唯一つだけである．最大値・最小値は無いこともある.

最大値・最小値を調べる問題では，通常，最大値および最小値だけでなく，最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること．また，最大値・最小値を調べる問題では，最大値が無いときは“ 最大値は無い ” ことを記し，最小値が無いときは“ 最小値は無い ” ことを記すこと．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x-3) \quad \left(\ x > \dfrac{3}{4}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$\boxed{例}$ 区間 $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x-3) \quad \left(x > \frac{3}{4} \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x-3)\} = 2 - \frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x-3) \quad \left(\ x > \dfrac{3}{4}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x-3)\} = 2 - \frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $\dfrac{8x-10}{4x-3} = 0$ ， $8x - 10 = 0$ ， $x = \dfrac{5}{4}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x-3) \quad \left(x > \dfrac{3}{4} \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x-3)\} = 2 - \frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3} .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $\dfrac{8x-10}{4x-3} = 0$ ， $8x - 10 = 0$ ， $x = \dfrac{5}{4}$ ． $x > \dfrac{3}{4}$ より

$4x - 3 > 0$ ．

例 区間 $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=2x-\ln(4x-3)$ $\left(\ x>\frac{3}{4}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x-\ln(4x-3)\} = 2-\frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3} .$$

$f'(x)=0$ とすると， $\frac{8x-10}{4x-3}=0$ ， $8x-10=0$ ， $x=\frac{5}{4}$ ． $x>\frac{3}{4}$ より $4x-3>0$ ． $\frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}$ のとき， $8x-10<0$ なので $f'(x)=\frac{8x-10}{4x-3}<0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x-3)$ $\left(\ x > \frac{3}{4}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x-3)\} = 2 - \frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{8x-10}{4x-3} = 0$ ，$8x - 10 = 0$ ，$x = \dfrac{5}{4}$ ．$x > \dfrac{3}{4}$ より $4x - 3 > 0$ ．$\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{4}$ のとき，$8x - 10 < 0$ なので $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} < 0$ ．

$x > \dfrac{5}{4}$ のとき，$8x - 10 > 0$ なので $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} > 0$ ．

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ のとき $f'(x) = \frac{8x-10}{4x-3} < 0$.

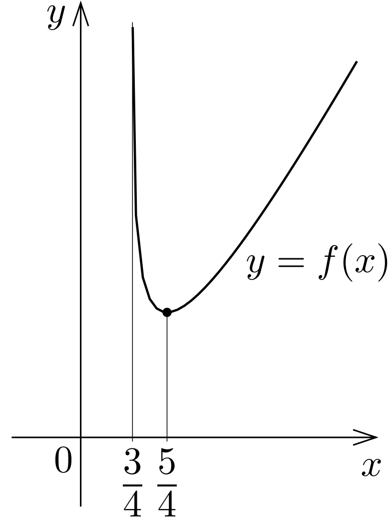
$x > \frac{5}{4}$ のとき $f'(x) = \frac{8x-10}{4x-3} > 0$.

$\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{4}$ のとき $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} < 0$.

$x > \dfrac{5}{4}$ のとき $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} > 0$. 従って，

関数 f は，区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$ において単調減少で

あり，区間 $\left[\dfrac{5}{4}, \infty\right)$ において単調増加である．

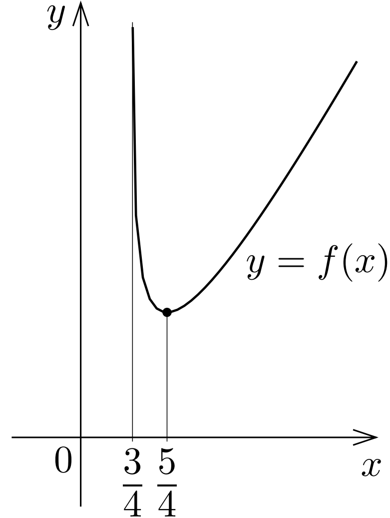


$\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{4}$ のとき $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} < 0$.

$x > \dfrac{5}{4}$ のとき $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} > 0$. 従って,

関数 f は, 区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$ において単調減少であり, 区間 $\left[\dfrac{5}{4}, \infty\right)$ において単調増加である.

$f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{5}{2} - \ln 2$ なので, 関数 f は $\dfrac{5}{4}$ において最小値 $\dfrac{5}{2} - \ln 2$ をとる ; 最大値はとらない.



終

$\boxed{\text{問}5.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=6\tan^{-1}x-\ln(x^2+1)$ と定める．g の最大値・最小値を調べよ．

$$g'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{(\qquad)}{\qquad\qquad}\,.$$

$g'(x)=0$ とすると，$\dfrac{(\qquad)}{\qquad\qquad}=0$ なので $x=\quad$．$x<\quad$ のとき，$\qquad 0$ なので $g'(x)=\dfrac{(\qquad)}{\qquad\qquad}\quad 0$．$x>\quad$ のとき，$\qquad 0$ なので $g'(x)=\dfrac{(\qquad)}{\qquad\qquad}\quad 0$．従って，関数 g は，区間 $(-\infty,\quad]$ において単調　　であり，区間 $[\quad,\infty)$ において単調　　である．$g(\quad)=\qquad$ なので，関数 g は　において最　値　　をとる．g は最　値をとらない．

問5.5.1 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 6\tan^{-1}x - \ln(x^2+1)$ と定める．g の最大値・最小値を調べよ．

$$g'(x) = \frac{6}{1+x^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2(3-x)}{x^2+1} \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{2(3-x)}{x^2+1} = 0$ なので $x = 3$ ．$x <$ 　のとき，　0 なので $g'(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^2+1}$ 　0 ．$x >$ 　のとき，　0 なので $g'(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^2+1}$ 　0 ．従って，関数 g は，区間 $(-\infty,\ ]$ において単調　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　である．$g(\ ) =$ 　なので，関数 g は　において最　値　をとる．g は最　値をとらない．

$\boxed{問5.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 6\tan^{-1}x - \ln(x^2+1)$ と定める．g の最大値・最小値を調べよ．

$$g'(x) = \frac{6}{1+x^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2(3-x)}{x^2+1} \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{2(3-x)}{x^2+1} = 0$ なので $x = 3$ ．$x < 3$ のとき，$3 - x > 0$ なので $g'(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^2+1} > 0$ ．$x > 3$ のとき，$3 - x < 0$ なので $g'(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^2+1} < 0$ ．従って，関数 g は，区間 $(-\infty, \quad]$ において単調　　　であり，区間 $[\quad, \infty)$ において単調　　　である．$g(\quad) =$ 　　　　　　　　　　　　なので，関数 g は　　において最　値　　　　　　　　　　　　　をとる．g は最　値をとらない．

$\boxed{\text{問}5.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 6\tan^{-1}x - \ln(x^2+1)$ と定める． g の最大値・最小値を調べよ．

$$g'(x) = \frac{6}{1+x^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2(3-x)}{x^2+1} .$$

$g'(x) = 0$ とすると， $\dfrac{2(3-x)}{x^2+1} = 0$ なので $x = 3$ ． $x < 3$ のとき， $3 - x > 0$ なので $g'(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^2+1} > 0$ ． $x > 3$ のとき， $3 - x < 0$ なので $g'(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^2+1} < 0$ ．従って，関数 g は，区間 $(-\infty,3]$ において単調増加であり，区間 $[3,\infty)$ において単調減少である． $g(3) = 6\tan^{-1}3 - \ln 10$ なので，関数 g は 3 において最大値 $6\tan^{-1}3 - \ln 10$ をとる． g は最小値をとらない．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ **区間** $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

$\boxed{例}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1\leq x\leq 4$) と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる.

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$$
$$=3(x-1)(x-3)\ .$$

例 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1\leq x\leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)\\ &=3(x-1)(x-3)\ .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p)=0$ とすると，$3(p-1)(p-3)=0$ なので，$p=1,3$ ．

$\boxed{例}$ 区 間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1\leq x\leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)\\ &=3(x-1)(x-3)\ .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p)=0$ とすると，$3(p-1)(p-3)=0$ なので，$p=1,3$.

更に，

$$\varphi(-1)=-16\ ,\quad \varphi(1)=4\ ,\quad \varphi(3)=0\ ,\quad \varphi(4)=4\ .$$

$$\varphi(-1) = -16\ ,\quad \varphi(1) = 4\ ,\quad \varphi(3) = 0\ ,\quad \varphi(4) = 4\ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$							
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16		4		0		4

$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16		4		0		4

$$\varphi(-1) = -16\ ,\quad \varphi(1) = 4\ ,\quad \varphi(3) = 0\ ,\quad \varphi(4) = 4\ .$$

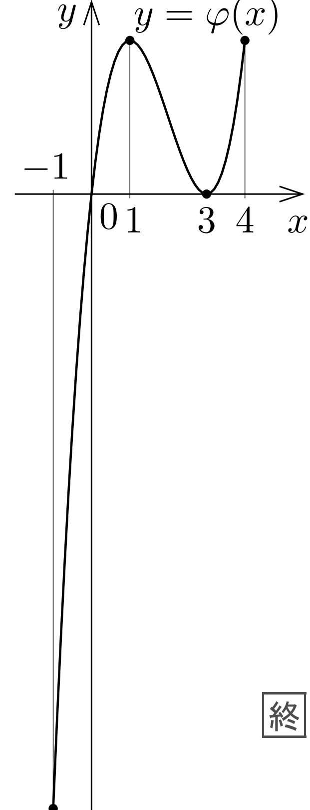
増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

$$\varphi(-1) = -16\ ,\quad \varphi(1) = 4\ ,\quad \varphi(3) = 0\ ,\quad \varphi(4) = 4\ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4



関数 φ は, 1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり, -1 において最小値 -16 をとる.

終

問5.5.2 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=8x^2-x^3-5x$ $(\ 2\le x\le 7\ )$ と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x)=\qquad\qquad=-(\qquad)(\qquad)$. $\psi'(x)=0$ とすると, $(\qquad)(\qquad)=0$, $2\le x\le 7$ より $x=\quad$. 更に, $\psi(2)=\quad$, $\psi(\ )=\quad$, $\psi(7)=\quad$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$		$\cdots$	7
$\varphi'(x)=-(\qquad)(\qquad)$					
$\varphi(x)=8x^2-x^3-5x$					

関数 ψ は, 　において最大値 　をとり, 　と 　とにおいて最小値 　をとる.

$\boxed{問 5.5.2}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x-1)(x-5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$		$\cdots$	7
$3x-1$ $x-5$					
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$					
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$					

関数 ψ は, 　 において最大値 　 をとり, 　 と 　 とにおいて最小値 　 をとる.

$\boxed{\text{問}5.5.2}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める． ψ の最大値・最小値を調べよ．

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$ ． $\psi'(x) = 0$ とすると， $(3x-1)(x-5) = 0$ ， $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$ ． 更に， $\psi(2) = 14$ ， $\psi(5) = 50$ ， $\psi(7) = 14$ ． 増減表は次のようになる．

x	2	$\cdots$	5	$\cdots$	7
$3x-1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$	14	$\nearrow$	50	$\searrow$	14

関数 ψ は， 　において最大値 　をとり， 　と 　とにおいて最小値 　をとる．

$\boxed{\text{問}5.5.2}$ **区間** $[2,7]$ **を定義域とする関数** ψ **を** $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) **と定める．** ψ **の最大値・最小値を調べよ．**

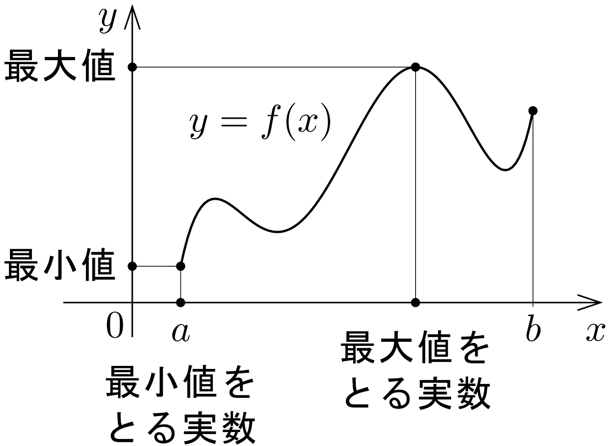
区間 $[2,7]$ **の各実数** x **について** $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$ **.** $\psi'(x) = 0$ **とすると，** $(3x-1)(x-5) = 0$ **，** $2 \leq x \leq 7$ **より** $x = 5$ **．更に，** $\psi(2) = 14$ **，** $\psi(5) = 50$ **，** $\psi(7) = 14$ **．増減表は次のようになる．**

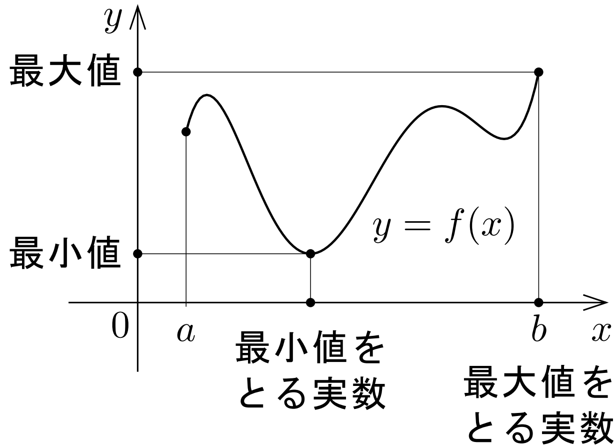
x	2	$\cdots$	5	$\cdots$	7
$3x-1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$	14	$\nearrow$	50	$\searrow$	14

関数 ψ **は，** 5 **において最大値** 50 **をとり，** 2 **と** 7 **とにおいて最小値** 14 **をとる．**

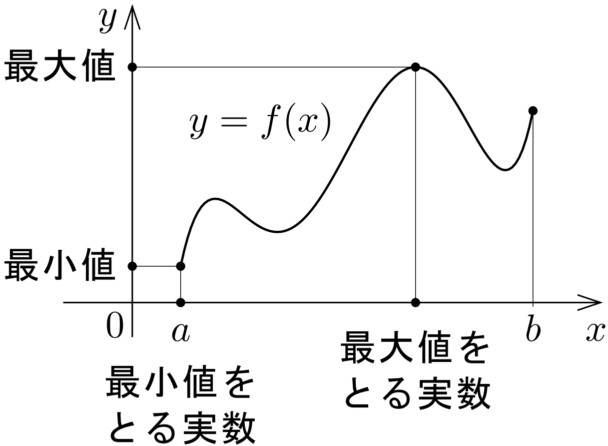
$\boxed{\text{終}}$

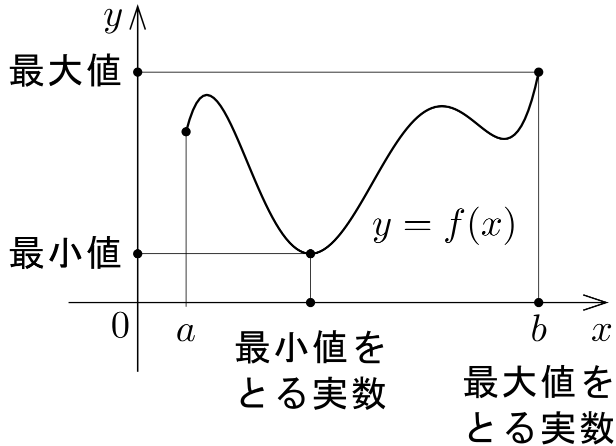
　実数 a,b について $a<b$ とする．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとする．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．





実数 a,b について $a<b$ とする．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとする．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．





次のことが成り立つ：f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f の定義域 $[a, b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f が p において極値をとるとき $f'(p) = 0$ なので,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

$f'(p) = 0$ または $p = a$ または $p = b$.

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f が p において極値をとるとき $f'(p)=0$ なので，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

$$f'(p)=0 \text{ または } p=a \text{ または } p=b\ .$$

従って， $f'(p)=0$ である p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で，最大の実数が f の最大値であり，最小の実数が f の最小値である．

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x\right\} = \cos x - \left\{\cos x + \left(x - \frac{3}{4}\right)(-\sin x)\right\} \\ &= \left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x\right\} = \cos x - \left\{\cos x + \left(x - \frac{3}{4}\right)(-\sin x)\right\}$$

$$= \left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x \ .$$

$g'(x) = 0$ とする： $\left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{3}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\ \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x\right\} = \cos x - \left\{\cos x + \left(x - \frac{3}{4}\right)(-\sin x)\right\} \\ &= \left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x\ . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする： $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \dfrac{3}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので， $x = \dfrac{3}{4}$ または $x = 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x\right\} = \cos x - \left\{\cos x + \left(x - \frac{3}{4}\right)(-\sin x)\right\}$$

$$= \left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x \ .$$

$g'(x) = 0$ とする：$\left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{3}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので，$x = \frac{3}{4}$ または $x = 0$ ．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$ ．

関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad g(0) = \frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p=-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad g(0) = \frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので, $0 < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$ より

$\sin 0 < \sin\frac{3}{4} < \sin\frac{\pi}{2}$ つまり $0 < \sin\frac{3}{4} < 1$.

関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p=-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad g(0) = \frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので， $0 < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin 0 < \sin\frac{3}{4} < \sin\frac{\pi}{2}$ つまり $0 < \sin\frac{3}{4} < 1$ ． よって，

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{4}{3}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ , \qquad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p=-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad g(0) = \frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので, $0 < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin 0 < \sin\frac{3}{4} < \sin\frac{\pi}{2}$ つまり $0 < \sin\frac{3}{4} < 1$. よって,

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{4}{3}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ , \qquad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

故に, 関数 g は, $\frac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり, $-\frac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる.

終

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ **区間** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **を定義域とする関数** g **を** $g(x) = \sin x + \left(\dfrac{5}{4} - x\right)\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ **と定める．関数** g **の最大値・最小値を調べよ．**

区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **の各実数** x **について**

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} =$$

$$= \left(\qquad\qquad\right) \qquad\quad ,$$

$g'(x) = 0$ **とする：** $\left(\qquad\qquad\right) \qquad = 0$ **より** $\qquad\qquad = 0$ **または** $\qquad\qquad = 0$ **；**

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ **なので，** $x = \qquad$ **または** $x = \qquad$ **.**

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \qquad , \qquad g(\ \ ) = \qquad , \qquad g\left(\ \ \right) = \qquad , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ **区間** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **を定義域とする関数** g **を** $g(x) = \sin x + \left(\dfrac{5}{4} - x\right)\cos x$ $\left(\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\ \right)$ **と定める．関数** g **の最大値・最小値を調べよ．**

区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = \cos x - \left(\frac{5}{4} - x\right)\sin x - \cos x$$

$$= \left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x\ ,$$

$g'(x) = 0$ とする： $\left(x - \dfrac{5}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \dfrac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので， $x = \dfrac{5}{4}$ または $x = 0$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \qquad , \qquad g(\quad) = \qquad , \qquad g\left(\quad\right) = \qquad , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \quad .$$

$\boxed{問5.5.3}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sin x+\left(\frac{5}{4}-x\right)\cos x$ $\left(\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\ \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べよ．

区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\sin x+\left(\frac{5}{4}-x\right)\cos x\right\}=\cos x-\left(\frac{5}{4}-x\right)\sin x-\cos x \\ &= \left(x-\frac{5}{4}\right)\sin x\ , \end{aligned}$$

$g'(x)=0$ とする： $\left(x-\frac{5}{4}\right)\sin x=0$ より $x-\frac{5}{4}=0$ または $\sin x=0$ ；
$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ なので， $x=\frac{5}{4}$ または $x=0$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ ,\qquad g(0)=\frac{5}{4}\ ,\qquad g\left(\frac{5}{4}\right)=\sin\frac{5}{4}\ ,\qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ .$$

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad g(0) = \frac{5}{4} \ , \qquad g\left(\frac{5}{4}\right) = \sin\frac{5}{4} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

$0 < \dfrac{5}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ で，区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，

$\sin 0 < \sin\dfrac{5}{4} < \sin\dfrac{\pi}{2}$ ，つまり $0 < \sin\dfrac{4}{3} < 1$ ．よって

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{5}{4}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(0) \ .$$

故に，関数 g は，0 において最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる.

終

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}\,.$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 \leq x < 3$ のとき，$(x+1)(x-3) \quad 0$ なので $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} \quad 0$ ．

例 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0 \leq x < 3$ のとき， $(x+1)(x-3) < 0$ なので $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} < 0$ ．

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0 \leq x < 3$ のとき，$(x+1)(x-3)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}<0$.

$x>3$ のとき，$(x+1)(x-3) \quad 0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} \quad 0$.

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0 \leq x < 3$ のとき， $(x+1)(x-3)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}<0$ ．

$x>3$ のとき， $(x+1)(x-3)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}>0$ ．

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3}=\frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0\leq x<3$ のとき，$(x+1)(x-3)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}<0$ ．

$x>3$ のとき，$(x+1)(x-3)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}>0$ ．関数 f は，区間 $[0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．$f(3)=-\dfrac{1}{6}$ ．f は 3 において最小値 $-\dfrac{1}{6}$ をとる．

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 \leq x < 3$ のとき，$(x+1)(x-3)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}<0$ ．

$x>3$ のとき，$(x+1)(x-3)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}>0$ ．関数 f は，区間 $[0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．$f(3)=-\dfrac{1}{6}$ ．f は 3 において最小値 $-\dfrac{1}{6}$ をとる．関数 f は区間 $[0,3]$ において単調減少なので，$0<x\leq 3$ である各実数 x について $f(x)<f(0)=\dfrac{1}{3}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 \leq x < 3$ のとき，$(x+1)(x-3) < 0$ なので $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} < 0$ ．

$x > 3$ のとき，$(x+1)(x-3) > 0$ なので $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} > 0$ ．関数 f は，区間 $[0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である． $f(3) = -\dfrac{1}{6}$ ． f は 3 において最小値 $-\dfrac{1}{6}$ をとる．関数 f は区間 $[0,3]$ において単調減少なので，$0 < x \leq 3$ である各実数 x について $f(x) < f(0) = \dfrac{1}{3}$ ． $x > 3$ である各実数 x について，$1-x < 0$ なので

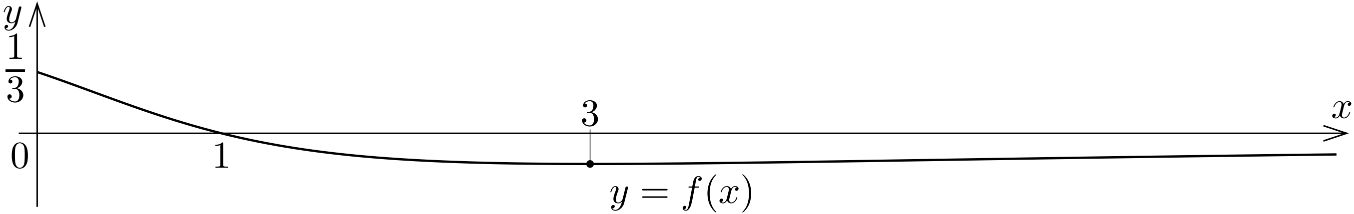
$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+3} < 0 < \frac{1}{3}.$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

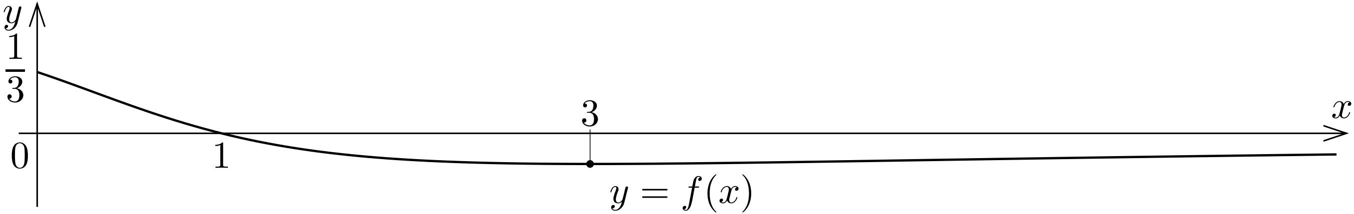
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1-x}{x^2+3} = \frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 \leq x < 3$ のとき，$(x+1)(x-3)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}<0$ ．

$x>3$ のとき，$(x+1)(x-3)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}>0$ ．関数 f は，区間 $[0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である． $f(3)=-\dfrac{1}{6}$ ． f は 3 において最小値 $-\dfrac{1}{6}$ をとる．関数 f は区間 $[0,3]$ において単調減少なので，$0<x\leq 3$ である各実数 x について $f(x)<f(0)=\dfrac{1}{3}$ ． $x>3$ である各実数 x について，$1-x<0$ なので $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}<0<\dfrac{1}{3}$ ． f は 0 において最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる．



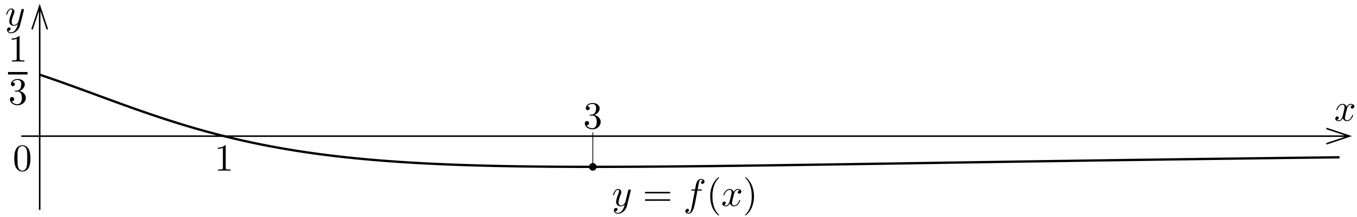
y
$\frac{1}{3}$
x
3
0
1
$y = f(x)$



この関数 f について，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\,\frac{\dfrac{1}{x}-1}{1+\dfrac{3}{x^2}}\right) = 0\cdot\frac{-1}{1}$$

$$= 0 \ .$$



この関数 f について，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{3}{x^2}} \right) = 0 \cdot \frac{-1}{1}$$

$$= 0 \ .$$

f は区間 $[3,\infty)$ において単調増加であるが，$x\to\infty$ のとき $f(x)$ は 0 に収束するので ∞ に発散しない. 終

$\boxed{\text{問}}$ 区間 $[1,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x-2}{x^2+5} = -\frac{x^2 \qquad\qquad}{(x^2+5)^2} = -\frac{(\qquad)(\qquad)}{(x^2+5)^2}\ .$$

$1 \leq x < \quad$ のとき，$(\qquad)(\qquad) \quad 0$ なので $f'(x) = -\dfrac{(\qquad)(\qquad)}{(x^2+5)^2} \quad 0$ ．

$x > \quad$ のとき，$(\qquad)(\qquad) \quad 0$ なので $f'(x) = -\dfrac{(\qquad)(\qquad)}{(x^2+5)^2} \quad 0$ ．関数 f は，区間 $[1,\ ]$ において単調　　　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　　である．$f(\ ) = \qquad$ ．f は　　において最　値　　　をとる．関数 f は区間 $[1,\ ]$ において単調増加なので，$1 < x \leq \quad$ である各実数 x について $f(x) \quad f(1) = \qquad$ ．$x > \quad$ である各実数 x について，$\qquad\qquad 0$ なので $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+3} \quad 0 \qquad\qquad$ ．f は　　において最　値　　　をとる．

問 区間 $[1,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{x-2}{x^2+5}=-\frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2}=-\frac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}\ .$$

$1\leq x<\quad$ のとき，$(x+1)(x-5)\quad 0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}\quad 0$ ．

$x>\quad$ のとき，$(x+1)(x-5)\quad 0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}\quad 0$ ．関数 f は，区間 $[1,\ ]$ において単調　　　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　である．$f(\ )=\qquad$ ．f は　　において最　値　　　をとる．関数 f は区間 $[1,\ ]$ において単調増加なので，$1<x\leq\quad$ である各実数 x について $f(x)\quad f(1)=\qquad$ ．$x>\quad$ である各実数 x について，　　　　0 なので $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3}\quad 0\qquad$ ．f は　　において最　値　　　をとる．

問 区間 $[1,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{x-2}{x^2+5}=-\frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2}=-\frac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}\ .$$

$1\leq x<5$ のとき，$(x+1)(x-5)<0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}>0$ ．

$x>5$ のとき，$(x+1)(x-5)>0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}<0$ ．関数 f は，区間 $[1,\ ]$ において単調　　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　である．$f(\ )=$　　．f は　　において最　値　　をとる．関数 f は区間 $[1,\ ]$ において単調増加なので，$1<x\leq$　　である各実数 x について $f(x)$　　$f(1)=$　　．$x>$　　である各実数 x について，　　　0 なので

$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3}$　　0　　　．f は　　において最　値　　をとる．

問 区間 $[1,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{x-2}{x^2+5}=-\frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2}=-\frac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}\ .$$

$1\leq x<5$ のとき, $(x+1)(x-5)<0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}>0$. $x>5$ のとき, $(x+1)(x-5)>0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}<0$. 関数 f は, 区間 $[1,5]$ において単調増加であり, 区間 $[5,\infty)$ において単調減少である. $f(\quad)=\dfrac{1}{10}$. f は 5 において最　値 $\dfrac{1}{10}$ をとる. 関数 f は区間 $[1,\quad]$ において単調増加なので, $1<x\leq$ 　である各実数 x について $f(x)$ 　$f(1)=$ 　. $x>$ 　である各実数 x について, 　0 なので $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3}$ 　0 　. f は 　において最　値 　をとる.

問 区間 $[1,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x-2}{x^2+5} = -\frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2} = -\frac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2} \ .$$

$1 \leq x < 5$ のとき， $(x+1)(x-5)<0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}>0$ ． $x>5$ のとき， $(x+1)(x-5)>0$ なので $f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}<0$ ．関数 f は，区間 $[1,5]$ において単調増加であり，区間 $[5,\infty)$ において単調減少である． $f(5)=\dfrac{1}{10}$ ． f は 5 において最大値 $\dfrac{1}{10}$ をとる．関数 f は区間 $[1,5]$ において単調増加なので， $1<x\leq 5$ である各実数 x について $f(x)>f(1)=-\dfrac{1}{6}$ ． $x>5$ である各実数 x について， $x-2>0$ なので $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3}>0>-\dfrac{1}{6}$ ． f は 1 において最小値 $-\dfrac{1}{6}$ をとる． 終