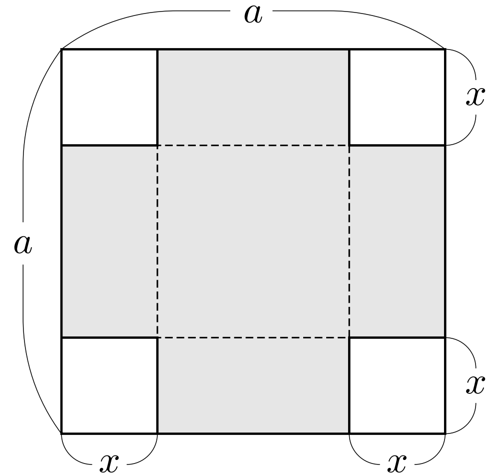
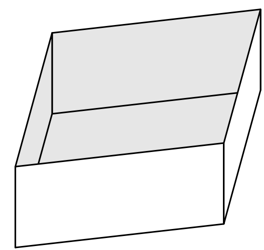
5.6　関数の最大値最小値の応用

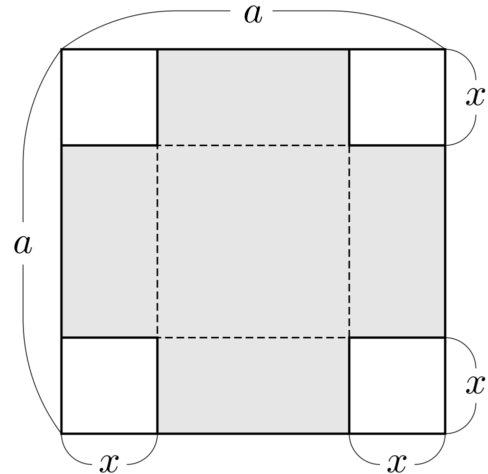
関数の最大値最小値を用いて図形的な問題を解く.

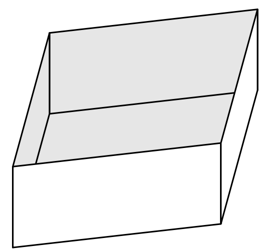
例 定数 a は正の実数とする．1 辺の長さが a の正方形のブリキ板があるとする． $0 \leq x \leq \dfrac{a}{2}$ である変数 x に対して，右図のように，この正方形の 4 隅から 1 辺の長さが x の正方形を切り取って，網掛の部分に対して点線を直角に折り曲げて切断した縁どうしを接合して，上面のない正方形柱の枡の形の容器を作る；この容器の容積を $V(x)$ とおく（容器の壁面の厚みは無視する）．変数 x の関数 $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求める．





$\boxed{例}$ 定数 a は正の実数とする．1 辺の長さが a の正方形のブリキ板があるとする． $0 \leq x \leq \dfrac{a}{2}$ である変数 x に対して，右図のように，この正方形の 4 隅から 1 辺の長さが x の正方形を切り取って，網掛の部分に対して点線を直角に折り曲げて切断した縁どうしを接合して，上面のない正方形柱の枡の形の容器を作る；この容器の容積を $V(x)$ とおく（容器の壁面の厚みは無視する）．変数 x の関数 $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求める．





正方形柱の底面は一辺の長さが $a-2x$ の正方形で高さは x なので，正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \quad .$$

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x\cdot 2(2x-a)\cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x \cdot 2(2x-a) \cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

$V'(x) = 0$ とすると， $(2x-a)(6x-a) = 0$ ， $x = \dfrac{a}{2}$ または $x = \dfrac{a}{6}$.

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x \cdot 2(2x-a) \cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

$V'(x) = 0$ とすると，$(2x-a)(6x-a) = 0$ ，$x = \dfrac{a}{2}$ または $x = \dfrac{a}{6}$.

$x < \dfrac{a}{2}$ のとき $2x - a < 0$.

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x\cdot 2(2x-a)\cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

$V'(x)=0$ とすると， $(2x-a)(6x-a)=0$ ， $x=\frac{a}{2}$ または $x=\frac{a}{6}$.

$x<\frac{a}{2}$ のとき $2x-a<0$ ． $0<x<\frac{a}{6}$ のとき， $6x-a<0$ ，よって

$V'(x)=(2x-a)(6x-a)>0$.

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x \cdot 2(2x-a) \cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

$V'(x) = 0$ とすると， $(2x-a)(6x-a) = 0$ ， $x = \dfrac{a}{2}$ または $x = \dfrac{a}{6}$.

$x < \dfrac{a}{2}$ のとき $2x - a < 0$. $0 < x < \dfrac{a}{6}$ のとき， $6x - a < 0$ ，よって

$V'(x) = (2x-a)(6x-a) > 0$. $\dfrac{a}{6} < x < \dfrac{a}{2}$ のとき， $6x - a > 0$ ，よって

$V'(x) = (2x-a)(6x-a) < 0$.

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x\cdot 2(2x-a)\cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

$V'(x)=0$ とすると，$(2x-a)(6x-a)=0$ ，$x=\dfrac{a}{2}$ または $x=\dfrac{a}{6}$.

$x<\dfrac{a}{2}$ のとき $2x-a<0$ ．$0<x<\dfrac{a}{6}$ のとき，$6x-a<0$ ，よって

$V'(x)=(2x-a)(6x-a)>0$ ．$\dfrac{a}{6}<x<\dfrac{a}{2}$ のとき，$6x-a>0$ ，よって

$V'(x)=(2x-a)(6x-a)<0$ ．関数 $V(x)$ は，区間 $\left[0,\dfrac{a}{6}\right]$ において単調増加

であり，区間 $\left[\dfrac{a}{6},\dfrac{a}{2}\right]$ において単調減少である.

正方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (a-2x)^2 x = x(2x-a)^2 \ .$$

微分すると

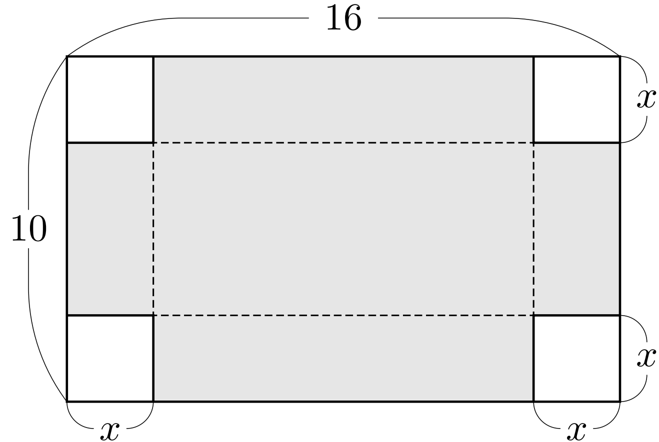
$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{x(2x-a)^2\} = (2x-a)^2 + x\cdot 2(2x-a)\cdot 2 = (2x-a)(6x-a) \ .$$

$V'(x)=0$ とすると， $(2x-a)(6x-a)=0$ ， $x=\dfrac{a}{2}$ または $x=\dfrac{a}{6}$ ．

$x<\dfrac{a}{2}$ のとき $2x-a<0$ ． $0<x<\dfrac{a}{6}$ のとき， $6x-a<0$ ，よって $V'(x)=(2x-a)(6x-a)>0$ ． $\dfrac{a}{6}<x<\dfrac{a}{2}$ のとき， $6x-a>0$ ，よって $V'(x)=(2x-a)(6x-a)<0$ ．関数 $V(x)$ は，区間 $\left[0,\dfrac{a}{6}\right]$ において単調増加であり，区間 $\left[\dfrac{a}{6},\dfrac{a}{2}\right]$ において単調減少である．故に $V(x)$ が最大値をとるときの x の値は $\dfrac{a}{6}$ である．

終

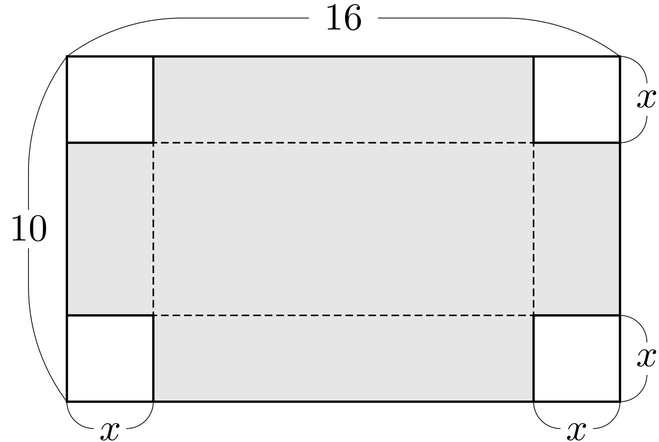
$\boxed{\text{問}5.6.1}$ 横幅が 16 であり縦幅が 10 である長方形のブリキ板があるとする． $0 \leq x \leq 5$ である変数 x に対して，右図のように，この長方形の 4 隅から 1 辺の長さが x の正方形を切り取って，網掛の部分に対して点線を直角に折り曲げて切断した縁どうしを接合して，上面のない長方形柱の容器の形の容器を作る；この容器の容積を $V(x)$ とおく（容器の壁面の厚みは無視する）．変数 x の関数 $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求めよ．



底面の長方形の辺の長さは　　　　　　と　　　　　　とで高さは　　なので，長方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad = 4(\qquad\qquad\qquad\qquad).$$

$\boxed{\text{問}5.6.1}$ 横幅が 16 であり縦幅が 10 である長方形のブリキ板があるとする． $0 \leq x \leq 5$ である変数 x に対して，右図のように，この長方形の 4 隅から 1 辺の長さが x の正方形を切り取って，網掛の部分に対して点線を直角に折り曲げて切断した縁どうしを接合して，上面のない長方形柱の容器の形の容器を作る；この容器の容積を $V(x)$ とおく（容器の壁面の厚みは無視する）．変数 x の関数 $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求めよ．



　底面の長方形の辺の長さは $10-2x$ と $16-2x$ とで高さは x なので，長方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (10-2x)(16-2x)x = 4(x^3 - 13x^2 + 40x)\ .$$

底面の長方形の辺の長さは $10-2x$ と $16-2x$ とで高さは x なので，長方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (10-2x)(16-2x)x = 4(x^3-13x^2+40x)\ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{4(x^3-13x^2+40x)\} = 4(\qquad\qquad\qquad) = 4(\qquad)(\qquad)\ .$$

$V'(x)=0$ とすると，$x=\quad$ または $x=\quad$ ，$0 \leq x \leq 5$ なので $x=\quad$.
$0 < x < \quad$ のとき $V'(x) = 4(\qquad)(\qquad)\quad 0$ ；$\quad < x < 5$ のとき $V'(x) = 4(\qquad)(\qquad)\quad 0$. 関数 $V(x)$ は，区間 $[0,\ ]$ において単調増加であり，区間 $[\ ,5]$ において単調減少である．故に $V(x)$ が最大値をとるときの x の値は　　である．

底面の長方形の辺の長さは $10-2x$ と $16-2x$ とで高さは x なので，長方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (10-2x)(16-2x)x = 4(x^3-13x^2+40x) \ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{4(x^3-13x^2+40x)\} = 4(3x^2-26x+40) = 4(x-2)(3x-20) \ .$$

$V'(x)=0$ とすると， $x=2$ または $x=\dfrac{20}{3}$ ， $0 \leq x \leq 5$ なので $x=2$ ． $0<x<2$ のとき $V'(x)=4(x-2)(3x-20)>0$ ； $2<x<5$ のとき $V'(x)=4(x-2)(3x-20)<0$ ．関数 $V(x)$ は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,5]$ において単調減少である．故に $V(x)$ が最大値をとるときの x の値は 2 である．

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定数 S は正の実数とする．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく．S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求める．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 S は正の実数とする．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく．S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求める．

　直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので，$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ．

$\boxed{例}$ 定数 S は正の実数とする．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく．S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求める．

　直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので，$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ．よって，$2\pi rh = S - 2\pi r^2$ ，$h = \dfrac{S}{2\pi r} - r$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 S は正の実数とする．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく．S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求める．

直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので，$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ．よって，$2\pi rh = S - 2\pi r^2$ ，$h = \dfrac{S}{2\pi r} - r$ ．これより，

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \ .$$

$\boxed{例}$ 定数 S は正の実数とする．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく．S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求める．

　直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので，$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ．よって，$2\pi rh = S - 2\pi r^2$ ，$h = \dfrac{S}{2\pi r} - r$ ．これより，

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \ .$$

変数 V を変数 r の関数として微分する．

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{Sr}{2} - \pi r^3 \right) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 \ .$$

$\boxed{例}$ 定数 S は正の実数とする．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく．S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求める．

直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので， $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ．よって， $2\pi rh = S - 2\pi r^2$ ， $h = \dfrac{S}{2\pi r} - r$ ．これより，

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \ .$$

変数 V を変数 r の関数として微分する．

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{Sr}{2} - \pi r^3 \right) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 \ .$$

$\dfrac{dV}{dr} = 0$ とすると， $\dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$ ， $r^2 = \dfrac{S}{6\pi}$ ， $r > 0$ なので $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ．

$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$ ． $r > 0$ なので， $\frac{dV}{dr} = 0$ とすると $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ ．

$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2$ ． $r > 0$ なので， $\dfrac{dV}{dr} = 0$ とすると $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ．

$0 < r < \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2 < \dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2 < \dfrac{S}{2}$ ， $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 > 0$ ．

$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2$ ．　$r > 0$ なので，　$\dfrac{dV}{dr} = 0$ とすると $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ．

$0 < r < \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき，　$r^2 < \dfrac{S}{6\pi}$ ，　$3\pi r^2 < \dfrac{S}{2}$ ，　$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 > 0$ ．

$r > \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき，　$r^2 > \dfrac{S}{6\pi}$ ，　$3\pi r^2 > \dfrac{S}{2}$ ，　$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 < 0$ ．

$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$ ． $r > 0$ なので，$\frac{dV}{dr} = 0$ とすると $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ ．

$0 < r < \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ のとき，$r^2 < \frac{S}{6\pi}$ ，$3\pi r^2 < \frac{S}{2}$ ，$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 > 0$ ．

$r > \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ のとき，$r^2 > \frac{S}{6\pi}$ ，$3\pi r^2 > \frac{S}{2}$ ，$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 < 0$ ．r の関数 V は，$0 < r \leq \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調増加であり，$r \geq \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調減少である.

$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2$ ． $r > 0$ なので， $\dfrac{dV}{dr} = 0$ とすると $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ．

$0 < r < \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2 < \dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2 < \dfrac{S}{2}$ ， $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 > 0$ ．

$r > \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2 > \dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2 > \dfrac{S}{2}$ ， $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 < 0$ ． r の関数 V は， $0 < r \leq \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調増加であり， $r \geq \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調減少である． V の値が最大になるのは $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のときである．

$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2$ ． $r > 0$ なので，$\dfrac{dV}{dr} = 0$ とすると $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ．

$0 < r < \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき，$r^2 < \dfrac{S}{6\pi}$ ，$3\pi r^2 < \dfrac{S}{2}$ ，$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 > 0$ ．

$r > \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき，$r^2 > \dfrac{S}{6\pi}$ ，$3\pi r^2 > \dfrac{S}{2}$ ，$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2 < 0$ ．r の関数 V は，$0 < r \leq \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調増加であり，$r \geq \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調減少である．V の値が最大になるのは $r = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のときである．このとき

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r = \frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{6\pi}{S}} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6S}{\pi}} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{6S}{\pi}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6S}{\pi}} = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}} \ .$$

$\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S}{2}-3\pi r^2$ ． $r>0$ なので， $\dfrac{dV}{dr}=0$ とすると $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ．

$0<r<\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2<\dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2<\dfrac{S}{2}$ ， $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S}{2}-3\pi r^2>0$ ．

$r>\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2>\dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2>\dfrac{S}{2}$ ， $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S}{2}-3\pi r^2<0$ ． r の関数 V は， $0<r\leq\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調増加であり， $r\geq\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ の範囲で単調減少である． V の値が最大になるのは $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のときである．このとき

$$h=\frac{S}{2\pi r}-r=\frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{6\pi}{S}}-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}\ .$$

表面積が S である直円柱の体積が最大になるときの底面の半径は $\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ であり高さは $\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$ である．

終

$\boxed{\text{問}5.6.2}$ 定数 S は正の実数とする．直円柱の側面と底面だけ（上面が無い）の中空の形の容器で側面積と底面積との和が S であるものの容積を最大にするには底面の円の半径及び高さをいくらにすればよいか調べる．側面および底面の厚さは無視する．側面積と一つの底面積との和が S である直円柱の形の，高さを h とおき，体積を V とおく．r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求めよ．

直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので，$S=\pi r^2+2\pi rh$ ．よって，$2\pi rh=$ 　　　　　，$h=$ 　　　　　．これより，

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\left(\qquad\qquad\right)=\qquad\qquad.$$

$\boxed{問 5.6.2}$ 定数 S は正の実数とする．直円柱の側面と底面だけ（上面が無い）の中空の形の容器で側面積と底面積との和が S であるものの容積を最大にするには底面の円の半径及び高さをいくらにすればよいか調べる．側面および底面の厚さは無視する．側面積と一つの底面積との和が S である直円柱の形の，高さを h とおき，体積を V とおく．r と h と V とは値が正の実数である変数である．V の値が最大になるときの r の値と h の値とを求めよ．

直円柱の底面積は πr^2 であり側面積は $2\pi rh$ なので，$S = \pi r^2 + 2\pi rh$ ．よって，$2\pi rh = S - \pi r^2$ ，$h = \dfrac{S}{2\pi r} - \dfrac{r}{2}$ ．これより，

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - \frac{r}{2} \right) = \frac{S}{2} r - \frac{\pi}{2} r^3 \ .$$

変数 r の関数 $V=\frac{S}{2}r-\frac{\pi}{2}r^3$ を微分する.

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\Big(\qquad\qquad \Big) = \qquad\qquad = \frac{\qquad}{} .$$

$\frac{dS}{dr}=0$ とすると, $\qquad =0$, $r^2=\qquad$, $r>0$ なので $r=\qquad$.

$0<r<\qquad$ のとき, $r^2\qquad$, $\qquad$, $\frac{dV}{dr}=\frac{\qquad}{}\quad 0$.

$r>\qquad$ のとき, $r^2\qquad$, $\qquad$, $\frac{dV}{dr}=\frac{\qquad}{}\quad 0$. r の関数

V は, $0<r\leq\qquad$ の範囲で単調　であり, $r\geq\qquad$ の範囲で単調

　である. V の値が最　になるのは $r=\qquad$ のときである. このとき

$$h=\frac{S}{2\pi r}-\frac{r}{2}=$$

変数 r の関数 $V=\dfrac{S}{2}r-\dfrac{\pi}{2}r^3$ を微分する.

$$\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}r-\frac{\pi}{2}r^3\right)=\frac{S}{2}-\frac{3\pi}{2}r^2=\frac{S-3\pi r^2}{2}\ .$$

$\dfrac{dS}{dr}=0$ とすると, $S-3\pi r^2=0$, $r^2=\dfrac{S}{3\pi}$, $r>0$ なので $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$.

$0<r<\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき, $r^2\quad\dfrac{S}{3\pi}$, $3\pi r^2\quad S$, $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S-3\pi r^2}{2}\quad 0$.

$r>\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき, $r^2\quad\dfrac{S}{3\pi}$, $3\pi r^2\quad S$, $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S-3\pi r^2}{2}\quad 0$. r の関数

V は, $0<r\leq\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ の範囲で単調　　であり, $r\geq\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ の範囲で単調

　である. V の値が最　になるのは $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のときである. このとき

$$h=\frac{S}{2\pi r}-\frac{r}{2}=$$

変数 r の関数 $V=\dfrac{S}{2}r-\dfrac{\pi}{2}r^3$ を微分する．

$$\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}r-\frac{\pi}{2}r^3\right)=\frac{S}{2}-\frac{3\pi}{2}r^2=\frac{S-3\pi r^2}{2}\ .$$

$\dfrac{dS}{dr}=0$ とすると， $S-3\pi r^2=0$ ， $r^2=\dfrac{S}{3\pi}$ ， $r>0$ なので $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ ．

$0<r<\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき， $r^2<\dfrac{S}{3\pi}$ ， $3\pi r^2<S$ ， $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S-3\pi r^2}{2}>0$ ．

$r>\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき， $r^2>\dfrac{S}{3\pi}$ ， $3\pi r^2>S$ ， $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S-3\pi r^2}{2}<0$ ． r の関数

V は， $0<r\leq\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ の範囲で単調増加であり， $r\geq\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ の範囲で単調減

少である． V の値が最大になるのは $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のときである．このとき

$$h=\frac{S}{2\pi r}-\frac{r}{2}=\frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{S}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}\ .$$

側面積と底面積との和が S である直円柱の形の容器の容積が最大になるときの底面の円の半径は $\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ であり高さは $\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ である. 終