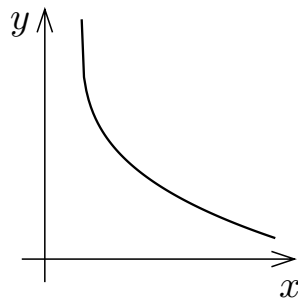
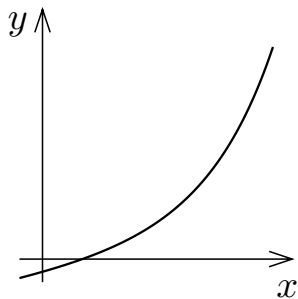
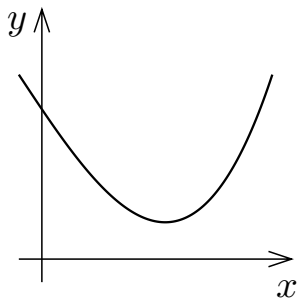


5.8 関数のグラフの凹凸

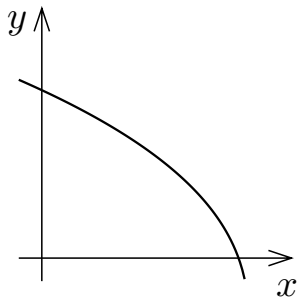
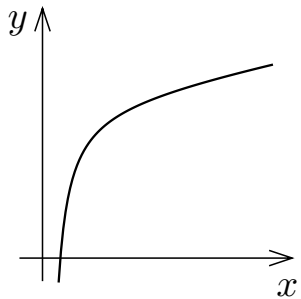
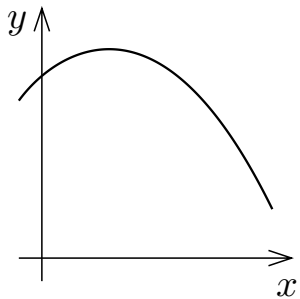
まず直観的な話から始める.

xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフについて、次の図のように、下側に出張っているとき、言い替えると、下方に膨らんでいるとき、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸であるという。



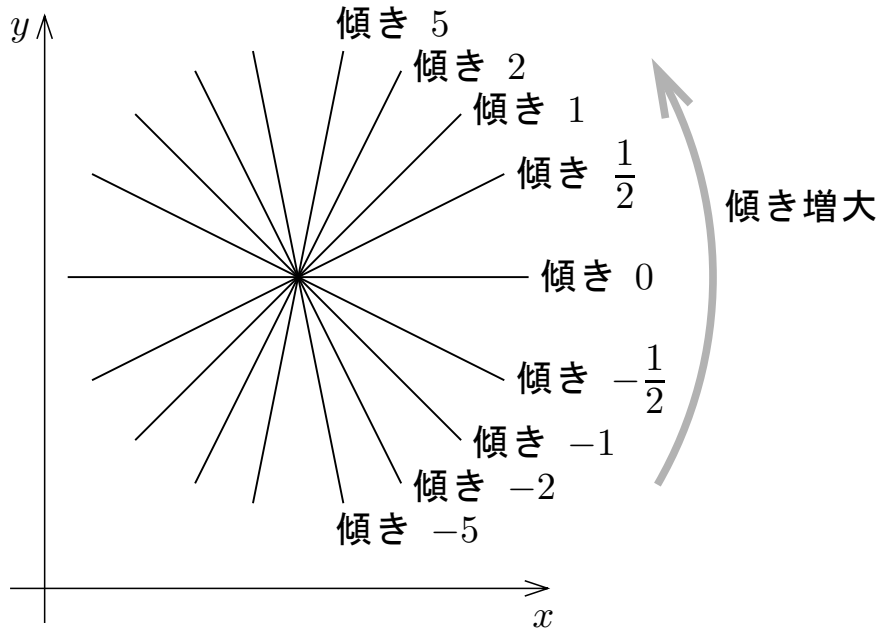
グラフが下に凸の状態

xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフについて、次の図のように、上側に出張っているとき、言い替えると、上方に膨らんでいるとき、 $y = f(x)$ のグラフは上に凸であるという。

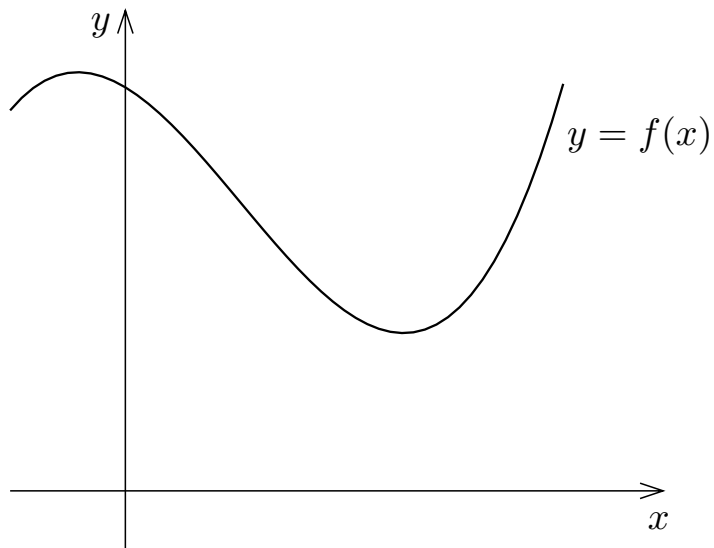


グラフが上に凸の状態

もう少しきちんと考
える。次のことを注意
する：座標平面におけ
る直線について、傾き
が大きいほど右上がり
になり、傾きが小さい
ほど右下がりになる。



区間 I が関数 f の定義に含まれているとする. 関数 f のグラフが区間 I において下に凸であるとは次のことを意味する:



区間 I が関数 f の定義に含まれているとする. 関数 f のグラフが区間 I において下に凸であるとは次のことを意味する:

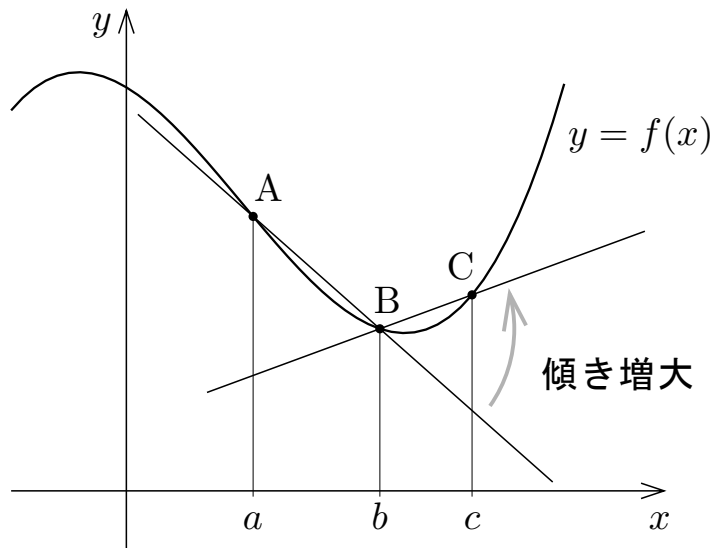
$a \leq b \leq c$ である I の各実数 a, b, c に対して, 座標平面における関数 f のグラフに属す3点

$$A = (a, f(a)),$$

$$B = (b, f(b)),$$

$$C = (c, f(c))$$

をとると, 直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上である. これを式で表す.



関数 f のグラフの点 $A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ と $C = (c, f(c))$ と
について,

$A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ とが属す直線 AB の傾きは $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$,

$B = (b, f(b))$ と $C = (c, f(c))$ とが属す直線 BC の傾きは $\frac{f(c) - f(b)}{c - b}$.

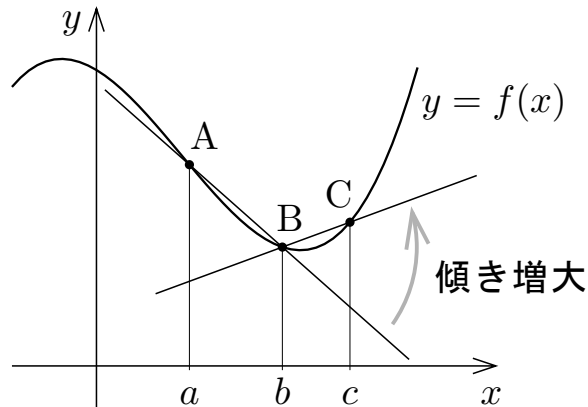
関数 f のグラフの点 $A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ と $C = (c, f(c))$ と
について、

$A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ とが属す直線 AB の傾きは $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$,

$B = (b, f(b))$ と $C = (c, f(c))$ とが属す直線 BC の傾きは $\frac{f(c) - f(b)}{c - b}$.

直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上であるということは次の不等式で表せる :

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$



関数 f のグラフの点 $A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ と $C = (c, f(c))$ と
について、

$A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ とが属す直線 AB の傾きは $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$,

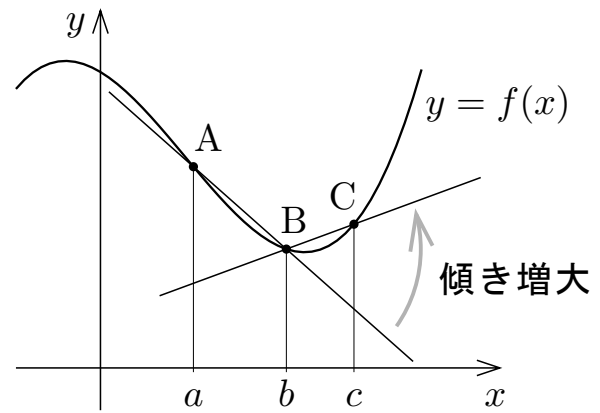
$B = (b, f(b))$ と $C = (c, f(c))$ とが属す直線 BC の傾きは $\frac{f(c) - f(b)}{c - b}$.

直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上であるということは次の不等式で表せる :

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

関数 f のグラフが区間 I において下に凸であることを次のように定義する : I の任意の点 a, b, c に対して、

$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} .$$



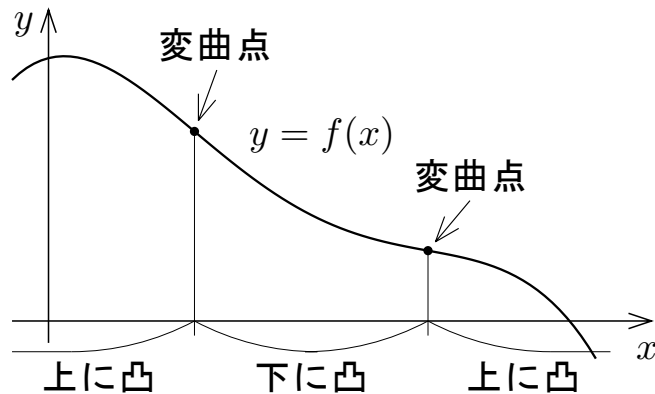
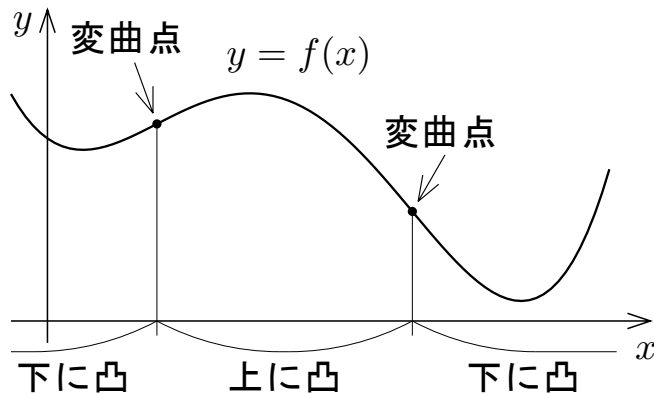
関数 f のグラフが区間 I において下に凸であることを次のように定義する：
 I の任意の点 a, b, c に対して，

$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} .$$

関数 f のグラフが区間 I において上に凸であることを次のように定義する：
 I の任意の点 a, b, c に対して，

$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} .$$

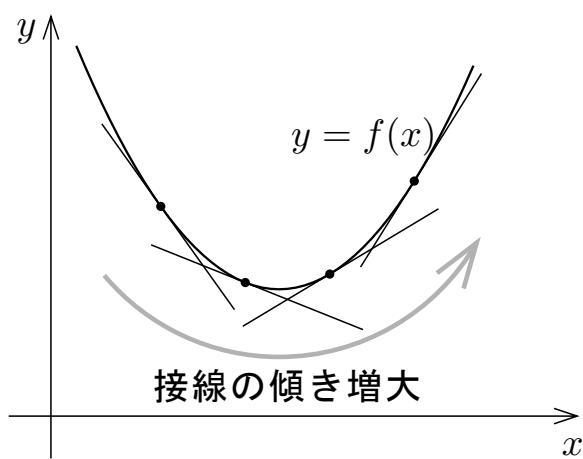
関数のグラフにおいて、下に凸の範囲と上に凸の範囲との境目である点を変曲点という。つまり、関数 f のグラフに属す点 P について、 P を境にグラフが下に凸から上に凸に変わるとき、及び、 P を境にグラフが上に凸から下に凸に変わるとき、点 P を f のグラフの変曲点という。



関数 f のグラフにおける下に凸と上に凸

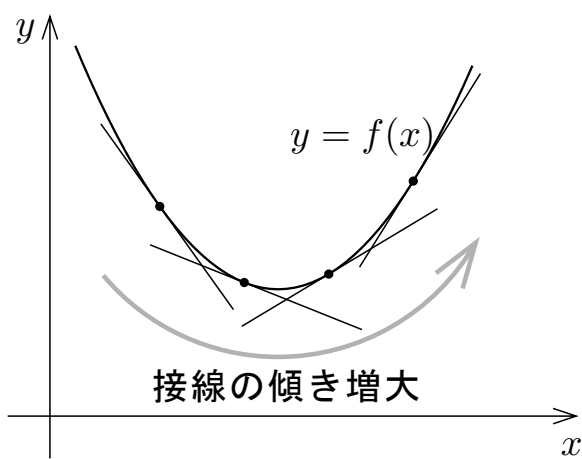
関数 f は区間 I において 2 回微分
可能とする.

関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする. 右図を見ると分かるように, f のグラフが下に凸であるとは, x の値が増加すると f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが増大すること (正確には減少しないこと) である.



関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする. 右図を見ると分かるように, f のグラフが下に凸であるとは, x の値が増加すると f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが増大すること (正確には減少しないこと) である. f のグラフの接線の傾きは微分係数 $f'(x)$ なので, 次のことが成り立つ.

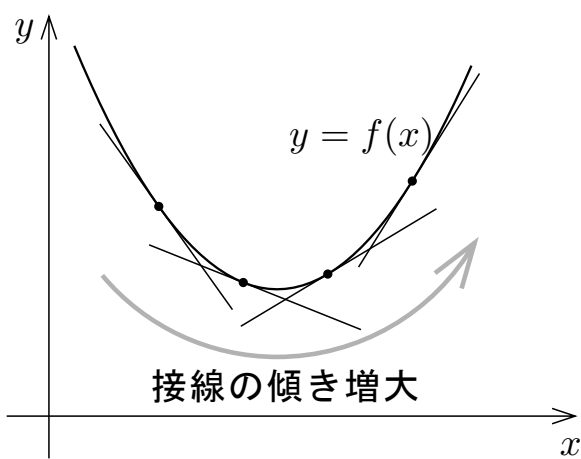
I において f のグラフが下に凸 $\iff I$ において f' が広義の単調増加.



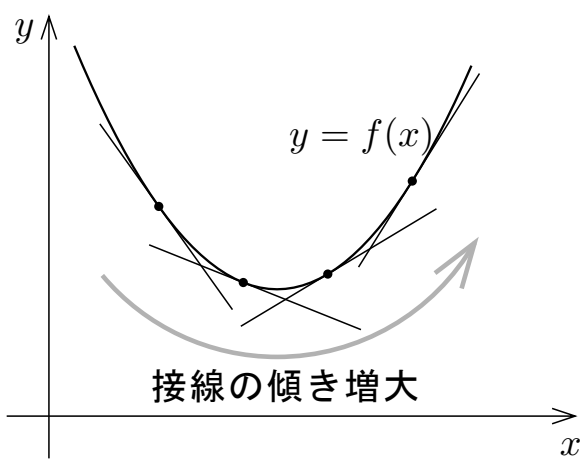
関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする. 右図を見ると分かるように, f のグラフが下に凸であるとは, x の値が増加すると f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが増大すること (正確には減少しないこと) である. f のグラフの接線の傾きは微分係数 $f'(x)$ なので, 次のことが成り立つ.

I において f のグラフが下に凸 $\iff I$ において f' が広義の単調増加 .
 更に

I において f' が広義の単調増加 $\iff I$ において $f''(x) \geq 0$.



関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする. 右図を見ると分かるように, f のグラフが下に凸であるとは, x の値が増加すると f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが増大すること (正確には減少しないこと) である. f のグラフの接線の傾きは微分係数 $f'(x)$ なので, 次のことが成り立つ.



I において f のグラフが下に凸 $\iff I$ において f' が広義の単調増加 .
 更に

I において f' が広義の単調増加 $\iff I$ において $f''(x) \geq 0$.

故に

I において f のグラフが下に凸 $\iff I$ において $f''(x) \geq 0$.

このようにして次の定理が証明される.

定理 区間 I で関数 f は 2 回微分可能であるとする. I に属す実数 p について, 点 $(p, f(p))$ が f のグラフの変曲点ならば $f''(p) = 0$. また,

I において f のグラフが下に凸 $\iff I$ において $f''(x) \geq 0$,

I において f のグラフが上に凸 $\iff I$ において $f''(x) \leq 0$.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) .$$

$g''(x) = 0$ とすると, $6(x - 2) = 0$ なので $x = 2$.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) .$$

$g''(x) = 0$ とすると, $6(x - 2) = 0$ なので $x = 2$.

$x < 2$ のとき $x - 2 < 0$ なので $g''(x) = 6(x - 2) < 0$,

$x > 2$ のとき $x - 2 > 0$ なので $g''(x) = 6(x - 2) > 0$.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) .$$

$g''(x) = 0$ とすると, $6(x - 2) = 0$ なので $x = 2$.

$x < 2$ のとき $x - 2 < 0$ なので $g''(x) = 6(x - 2) < 0$,

$x > 2$ のとき $x - 2 > 0$ なので $g''(x) = 6(x - 2) > 0$.

従って, 関数 g のグラフは, 区間 $(-\infty, 2]$ において上に凸であり, 区間 $[2, \infty)$ において下に凸である.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) .$$

$g''(x) = 0$ とすると, $6(x - 2) = 0$ なので $x = 2$.

$x < 2$ のとき $x - 2 < 0$ なので $g''(x) = 6(x - 2) < 0$,

$x > 2$ のとき $x - 2 > 0$ なので $g''(x) = 6(x - 2) > 0$.

従って, 関数 g のグラフは, 区間 $(-\infty, 2]$ において上に凸であり, 区間 $[2, \infty)$ において下に凸である. また, $g(2) = -6$ なので, g のグラフの変曲点は $(2, -6)$ だけである.

終

問5.8.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定める.

関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ.

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$f''(x) = 0$ とすると, $6x - 6x^2 = 0$ なので $x = 0$. $x < 0$ のとき,

$2x > 0$ なので $f''(x) = 6x - 6x^2 > 0$. $x > 0$ のとき, $2x < 0$ なので

$f''(x) = 6x - 6x^2 < 0$. 従って, 関数 f のグラフは, 区間 $(-\infty, 0]$ におい

て 下に凸であり, 区間 $[0, \infty)$ において 上に凸である. $f(0) = 0$. f のグ

ラフの変曲点は $(0, 0)$ だけである.

終

問5.8.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定める.

関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ.

$$f'(x) = 18x - 6x^2 - 3,$$

$$f''(x) = 18 - 12x = 6(3 - 2x)$$

$f''(x) = 0$ とすると, $6(3 - 2x) = 0$ なので $x = \frac{3}{2}$. $x < \frac{3}{2}$ のとき,

$2x$ なので $f''(x) = 6(3 - 2x) > 0$. $x > \frac{3}{2}$ のとき, $2x$ なので

$f''(x) = 6(3 - 2x) < 0$. 従って, 関数 f のグラフは, 区間 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ におい

て 下に凸であり, 区間 $[\frac{3}{2}, \infty)$ において 上に凸である. $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{2}$. f のグ

ラフの変曲点は $(\frac{3}{2}, \frac{27}{2})$ だけである.

終

問5.8.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定める.

関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ.

$$f'(x) = 18x - 6x^2 - 3,$$

$$f''(x) = 18 - 12x = 6(3 - 2x).$$

$f''(x) = 0$ とすると, $6(3 - 2x) = 0$ なので $x = \frac{3}{2}$. $x < \frac{3}{2}$ のとき,

$2x < 3$ なので $f''(x) = 6(3 - 2x) > 0$. $x > \frac{3}{2}$ のとき, $2x > 3$ なので

$f''(x) = 6(3 - 2x) < 0$. 従って, 関数 f のグラフは, 区間 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ におい

て下に凸であり, 区間 $[\frac{3}{2}, \infty)$ において上に凸である. $f(\frac{3}{2}) = 9$. f のグ

ラフの変曲点は $(\frac{3}{2}, 9)$ だけである.

終

問5.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^{2x}(x-4)$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ.

$$g'(x) = \quad = e^{2x}(\quad),$$

$$g''(x) = \quad = e^{2x}(x \quad).$$

$e^{2x} > 0$ なので, $x < \quad$ のとき $g''(x) = e^{2x}(x \quad) > 0$, $x > \quad$ のとき $g''(x) = e^{2x}(x \quad) < 0$. 従って, 関数 g のグラフは, 区間 $(-\infty, \quad]$ において \quad に凸であり, 区間 $[\quad, \infty)$ において \quad に凸である. $g(\quad) = \quad$. g のグラフの変曲点は (\quad, \quad) だけである.

問5.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^{2x}(x-4)$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ.

$$g'(x) = 2e^{2x}(x-4) + e^{2x} = e^{2x}(2x-7) ,$$

$$g''(x) = 2e^{2x}(2x-7) + e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}(x-3) .$$

$e^{2x} > 0$ なので, $x < 3$ のとき $g''(x) = 4e^{2x}(x-3) < 0$, $x > 3$ のとき $g''(x) = 4e^{2x}(x-3) > 0$. 従って, 関数 g のグラフは, 区間 $(-\infty, 3]$ において 凹に凸であり, 区間 $[3, \infty)$ において 凸に凸である. $g(3) = -e^6$. g のグラフの変曲点は $(3, -e^6)$ だけである.

問5.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^{2x}(x-4)$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ.

$$g'(x) = 2e^{2x}(x-4) + e^{2x} = e^{2x}(2x-7) ,$$

$$g''(x) = 2e^{2x}(2x-7) + e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}(x-3) .$$

$e^{2x} > 0$ なので, $x < 3$ のとき $g''(x) = 4e^{2x}(x-3) < 0$, $x > 3$ のとき $g''(x) = 4e^{2x}(x-3) > 0$. 従って, 関数 g のグラフは, 区間 $(-\infty, 3]$ において上に凸であり, 区間 $[3, \infty)$ において下に凸である. $g(3) = -e^6$. g のグラフの変曲点は $(3, -e^6)$ だけである.

終