

## 6.3 定義に従う定積分の計算

定積分の定義を復習する.

定義 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = \quad \quad \quad = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,

$$\delta_n = \quad ,$$

$$S_n =$$

とおく.  $S_n$  を表す式を  $f$  のリーマン和という.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \rightarrow \infty$  のとき収束して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が関数  $f$  及び実数  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば, 関数  $f$  は  $a$  から  $b$  まで (定) 積分可能であるといい,  $\quad$  を  $a$  から  $b$  ま

での  $f$  の定積分といい,  $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す:  $\int_a^b f(x) dx = \quad$  .

定義 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で, 関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,

$$\delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}),$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

とおく.  $S_n$  を表す式を  $f$  のリーマン和という.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \rightarrow \infty$  のとき収束して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が関数  $f$  及び実数  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば, 関数  $f$  は  $a$  から  $b$  まで (定) 積分可能であるといい,  $\int_a^b f(x) dx$  を  $a$  から  $b$  までの

$f$  の定積分といい,  $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

定義 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく.  $S_n$  を表す式を  $f$  のリーマン和という.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \rightarrow \infty$  のとき収束して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が関数  $f$  及び実数  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば, 関数  $f$  は  $a$  から  $b$  まで (定) 積分可能であるといい,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$  を  $a$  から  $b$  ま

での  $f$  の定積分といい,  $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す:  $\int_a^b f(x) dx =$  .

定義 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする。正の各自然数  $n$  に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく。 $S_n$  を表す式を  $f$  のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \rightarrow \infty$  のとき収束して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が関数  $f$  及び実数  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば、関数  $f$  は  $a$  から  $b$  まで (定) 積分可能であるといい、 $f$  のリーマン和  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を  $a$  から  $b$  までの  $f$  の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す： $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  .

関数  $f$  が  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとき、関数  $f$  は  $b$  から  $a$  まで積分可能であるといい、 $f$  の  $b$  から  $a$  までの定積分  $\int_b^a f(x) dx$  を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

リーマン和の極限值として定積分を計算してみる.

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する.

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.  $f(\xi_k) = c$  なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$$

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.  $f(\xi_k) = c$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c( \quad ) \end{aligned}$$

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  とについて  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.  $f(\xi_k) = c$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  とについて  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.  $f(\xi_k) = c$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

つまり定数関数  $f(x) = c$  のリーマン和は常に  $S_n = c(b - a)$  である.

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.  $f(\xi_k) = c$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

つまり定数関数  $f(x) = c$  のリーマン和は常に  $S_n = c(b - a)$  である. よって

$$\int_a^b c dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c(b - a)\} = \quad .$$

**例** 定数  $c$  に対して定数関数  $f(x) = c$  の定積分を計算する. 定数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $f(x)$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.  $f(\xi_k) = c$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

つまり定数関数  $f(x) = c$  のリーマン和は常に  $S_n = c(b - a)$  である. よって

$$\int_a^b c dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c(b - a)\} = c(b - a) .$$

$$\int_a^b c dx = c(b - a) .$$

特に,  $a = 0$  とすると

$$\int_0^b c dx = bc .$$

終

$$\int_a^b c dx = c(b-a) .$$

特に,  $a = 0$  とすると

$$\int_0^b c dx = bc .$$

終

このように掛け算は定数関数の定積分である. 定数関数の定積分以外にも様々な関数の定積分があるので, 定積分は掛け算の拡張である.

**例** 関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  をリーマン和の極限值として計算する.

**例** 関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  をリーマン和の極限值として計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.

**例** 関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  をリーマン和の極限值として計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 関数  $x^2$  は, 実数全体で連続なので, 2 から 5 まで積分可能である.

**例** 関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  をリーマン和の極限值として計算する。

正の各自然数  $n$  に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 関数  $x^2$  は, 実数全体で連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. 従って,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  が 0 に収束するならば, 関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

**例** 関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  をリーマン和の極限值として計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 関数  $x^2$  は, 実数全体で連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. 従って,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  が 0 に収束するならば, 関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

この等式の左辺の極限值を実際に計算するために, リーマン和  $S_n$  を具体的に定める.

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単にするために, 数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする.

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単にするために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする。公差を  $d$  とおくと、 $x_n = x_0 + dn$  なので  $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{5 - 2}{n} = \frac{3}{n}$  .

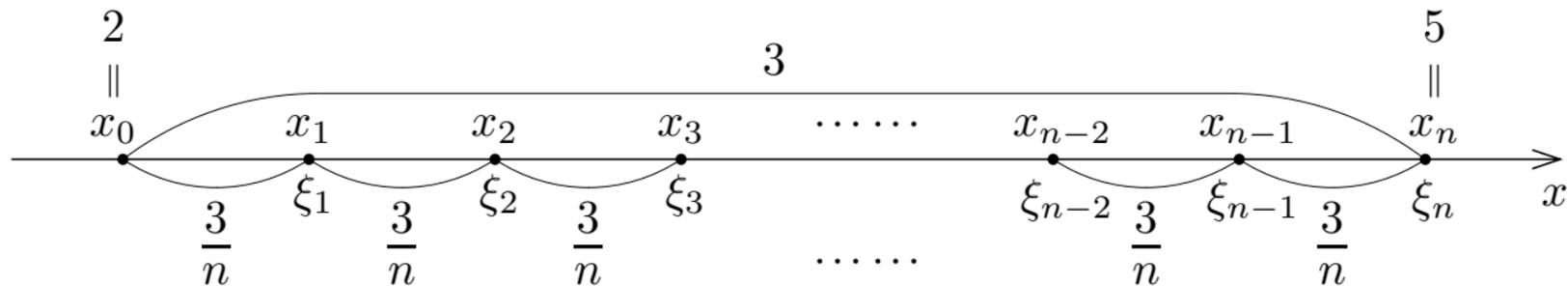
関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単にするために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする。公差を  $d$  とおくと、 $x_n = x_0 + dn$  なので  $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{5 - 2}{n} = \frac{3}{n}$  . よって、自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k .$$

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単にするために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする。公差を  $d$  とおくと、 $x_n = x_0 + dn$  なので  $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{5 - 2}{n} = \frac{3}{n}$  . よって、自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k .$$

更に自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $\xi_k = x_k = 2 + \frac{3}{n}k$  と定める。次の図のようになる。



$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$  .

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$  . これより, 関数  $x^2$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$  . これより, 関数  $x^2$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k$  ,

$x_k - x_{k-1} = d = \frac{3}{n}$  なので,

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$  . これより, 関数  $x^2$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k$  ,

$x_k - x_{k-1} = d = \frac{3}{n}$  なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2$$

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$  . これより, 関数  $x^2$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k$  ,

$x_k - x_{k-1} = d = \frac{3}{n}$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \\ &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{12}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) . \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \end{aligned}$$

定数  $c$  及び正の自然数  $n$  について,

$$\sum_{k=1}^n c = nc, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\ &= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  とするのので

$$= 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .
\end{aligned}$$

$$\int_2^5 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .
\end{aligned}$$

$$\int_2^5 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_2^5 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\
&= 12 + 18(1 + 0) + \frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 12 + 18 + 9 \\
&= 39 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_2^5 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\
&= 12 + 18(1 + 0) + \frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 12 + 18 + 9 \\
&= 39 .
\end{aligned}$$

故に  $\int_2^5 x^2 dx = 39$  .

**問6.3.1** 関数  $x^2$  は 1 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定める:  $x_0 = 1$ , 自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k = \xi_k = 1 + \frac{3}{n}k$ .

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$  なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する. よって関数  $x^2$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_1^4 x^2 dx$  に収束する:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^4 x^2 dx$ . 定積分  $\int_1^4 x^2 dx$  を関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n$  の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \quad \right)^2 \right\}$$

**問6.3.1** 関数  $x^2$  は 1 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定める:  $x_0 = 1$ , 自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k = \xi_k = 1 + \frac{3}{n}k$ .

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$  なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する. よって関数  $x^2$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_1^4 x^2 dx$  に収束する:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^4 x^2 dx$ . 定積分  $\int_1^4 x^2 dx$  を関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n$  の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ \right. \\
&= \\
&= \\
&= \left. \right\} \\
\int_1^4 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \right. \\
&= \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= \\
&= \\
\int_1^4 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= 3 + \frac{9(n+1)}{n} + \frac{9(2n^2 + 3n + 2)}{2n^2} \\
&= 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) .
\end{aligned}$$

$$\int_1^4 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= 3 + \frac{9(n+1)}{n} + \frac{9(2n^2 + 3n + 2)}{2n^2} \\
&= 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\} \\
&= 3 + 9(1 + 0) + \frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 3 + 9 + 9 \\
&= 21 .
\end{aligned}$$

故に  $\int_1^4 x^2 dx = 21$  .

**例** 指数関数  $2^x$  の 3 から 8 までの定積分  $\int_3^8 2^x dx$  を計算する.

**例** 指数関数  $2^x$  の 3 から 8 までの定積分  $\int_3^8 2^x dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  
指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  を考える.

**例** 指数関数  $2^x$  の 3 から 8 までの定積分  $\int_3^8 2^x dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  
指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 指数関数  $2^x$   
は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能である.

**例** 指数関数  $2^x$  の 3 から 8 までの定積分  $\int_3^8 2^x dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  
指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 指数関数  $2^x$   
は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能である. 従って,  $n \rightarrow \infty$   
のとき  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  が 0 に収束する  
ならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$   
は定積分  $\int_3^8 2^x dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

**例** 指数関数  $2^x$  の 3 から 8 までの定積分  $\int_3^8 2^x dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  
指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 指数関数  $2^x$   
は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能である. 従って,  $n \rightarrow \infty$   
のとき  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  が 0 に収束する  
ならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$   
は定積分  $\int_3^8 2^x dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

この等式の左辺の極限值を実際に計算するために, リーマン和  $S_n$  を具体的に定める.

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単に  
するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする.

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単に  
するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする。公差を  $d$  とおくと、  
 $x_n = x_0 + dn$  なので  $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{8 - 3}{n} = \frac{5}{n}$  .

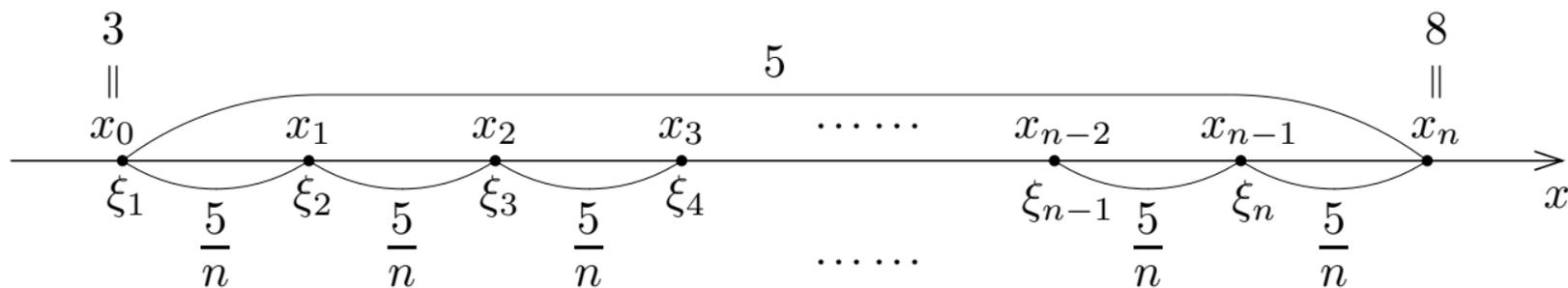
関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単に  
するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする。公差を  $d$  とおくと、  
 $x_n = x_0 + dn$  なので  $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{8 - 3}{n} = \frac{5}{n}$  . よって、自然数  $k = 0, 1,$   
 $2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 + dk = 3 + \frac{5}{n}k .$$

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  の式をなるべく簡単に  
 するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にする。公差を  $d$  とおくと、  
 $x_n = x_0 + dn$  なので  $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{8 - 3}{n} = \frac{5}{n}$  . よって、自然数  $k = 0, 1,$   
 $2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 + dk = 3 + \frac{5}{n}k .$$

更に自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$  と定める。  
 次の図のようになる。



自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$  なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} ;$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$  なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} ;$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$  .

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$  なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} ;$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$  . これより, 指数関数  $2^x$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_3^8 2^x dx$  に収束する :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$  なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n};$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$  . これより, 指数関数  $2^x$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_3^8 2^x dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について,  $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$  ,

$x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$  なので,

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$  なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n};$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$  . これより, 指数関数  $2^x$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_3^8 2^x dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について,  $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$  ,

$x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$  なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{3 + \frac{5}{n}(k-1)} \frac{5}{n} \right\} = \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)} \right\} \\ &= \frac{5 \cdot 2^3}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{5}{n}(k-1)} = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left( 2^{\frac{5}{n}} \right)^{k-1} . \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1}$$

正の自然数  $n$  及び実数  $a, r$  に対して,  $r \neq 1$  のとき  $\sum_{k=1}^n (ar^{k-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$  .

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく.

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく.  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて  
 $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく．  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$  , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく．  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$  , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$  .

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく．  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$  , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$  . 対数関数  $\ln x$  は連続なので,

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく.  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$ . 対数関数  $\ln x$  は連続なので,

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく.  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$ . 対数関数  $\ln x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \int_3^8 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく.  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$ ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$ . 対数関数  $\ln x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \int_3^8 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく．  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$  , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$  . 対数関数  $\ln x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \int_3^8 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \ln e \\ &\qquad\qquad\qquad \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数  $t$  を  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおく．  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$  , 両辺の自然対数を考えて  $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$  なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$  . 対数関数  $\ln x$  は連続なので,

$$\begin{aligned} \int_3^8 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248}{\ln 2} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \ln e \\ &= \frac{248}{\ln 2} . \end{aligned} \quad \ln e = \log_e e = 1$$

故に  $\int_3^8 2^x dx = \frac{248}{\ln 2}$  .

終

**問6.3.2** 指数関数  $3^x$  は 2 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定める:  $x_0 = 2$ , 自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $x_k = 2 + \frac{2}{n}k$ ,

$$\xi_k = x_{k-1} = 2 + \frac{2}{n}(k-1). \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \text{ に対して } x_k - x_{k-1} = \frac{2}{n} \text{ なの$$

ので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する. よって関数  $3^x$  のリーマン和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき定積分 } \int_2^4 3^x dx \text{ に収束する:}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^4 3^x dx$ . 定積分  $\int_2^4 3^x dx$  を関数  $3^x$  のリーマン和  $S_n$  の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} =$$

**問6.3.2** 指数関数  $3^x$  は 2 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定める:  $x_0 = 2$ , 自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $x_k = 2 + \frac{2}{n}k$ ,

$$\xi_k = x_{k-1} = 2 + \frac{2}{n}(k-1). \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \text{ に対して } x_k - x_{k-1} = \frac{2}{n} \text{ なの}$$

ので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する. よって関数  $3^x$  のリーマン和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき定積分 } \int_2^4 3^x dx \text{ に収束する:}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^4 3^x dx$ . 定積分  $\int_2^4 3^x dx$  を関数  $3^x$  のリーマン和  $S_n$  の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2 + \frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \left( \quad \right)^{-1} = \frac{18}{n} \frac{1}{\quad} = \frac{18}{n} \frac{1}{\quad} \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\quad} .
\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \quad$  とおく.  $3^{\frac{2}{n}} = \quad$ ,  $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(\quad)$ ,  
 $\frac{2}{n} = \ln(\quad)$ ,  $\frac{1}{n} = \quad$  なので,

$$S_n = \frac{1}{n} \frac{1}{\quad} = \quad = \quad = \quad .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$  なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \quad \right\} = \ln \left\{ \quad \right\} = \ln \quad$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{2}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$  とおく.  $3^{\frac{2}{n}} = \frac{t+1}{3}$ ,  $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln\left(\frac{t+1}{3}\right)$ ,  
 $\frac{2}{n} = \ln\left(\frac{t+1}{3}\right)$ ,  $\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t+1}{3}\right)$  なので,

$$S_n = \frac{1}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln\left(\frac{t+1}{3}\right) (t)} = \frac{1}{2} \frac{1}{t \ln\left(\frac{t+1}{3}\right)} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$  なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{t \ln\left(\frac{t+1}{3}\right)} \right\} = \frac{1}{2} \ln\left\{ \frac{3}{3-1} \right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t =$                       とおく.  $3^{\frac{2}{n}} =$                       ,  $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln($                       ) ,  
 $\frac{2}{n} = \ln($                       ) ,  $\frac{144}{n} =$                        なので,

$$S_n = \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \qquad = \qquad = \qquad .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$   なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \qquad \qquad \qquad \right\} = \ln \left\{ \qquad \qquad \qquad \right\} = \ln$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$  とおく.  $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$  ,  $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  
 $\frac{2}{n} \ln 3 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{144}{n} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3}$  なので,

$$S_n = \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \quad = \quad = \quad .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$  なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \quad \quad \quad \right\} = \ln \left\{ \quad \quad \quad \right\} = \ln$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$  とおく.  $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$  ,  $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  
 $\frac{2}{n} \ln 3 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{144}{n} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3}$  なので,

$$S_n = \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{72}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} \ln(1 + t) = \frac{72}{\ln 3} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$  なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{72}{\ln 3} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \right\} = \ln$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left( 3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$  とおく.  $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$  ,  $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1 + t)$  ,  
 $\frac{2}{n} \ln 3 = \ln(1 + t)$  ,  $\frac{144}{n} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3}$  なので,

$$S_n = \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{72}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} \ln(1 + t) = \frac{72}{\ln 3} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$  なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{72}{\ln 3} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \ln e$$

$$\begin{aligned}\int_2^4 3^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{72}{\ln 3} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \ln e \\ &= \frac{72}{\ln 3} .\end{aligned}$$

故に  $\int_2^4 3^x dx = \frac{72}{\ln 3}$  .

終

**例** 関数  $\sqrt{x}$  の 5 から 7 までの定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  を計算する.

**例** 関数  $\sqrt{x}$  の 5 から 7 までの定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  を考える.

**例** 関数  $\sqrt{x}$  の 5 から 7 までの定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 関数  $\sqrt{x}$  は, 0 以上の実数全体で連続なので, 5 から 7 まで積分可能である.

**例** 関数  $\sqrt{x}$  の 5 から 7 までの定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 関数  $\sqrt{x}$  は, 0 以上の実数全体で連続なので, 5 から 7 まで積分可能である. 従って,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  が 0 に収束するならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x} dx .$$

**例** 関数  $\sqrt{x}$  の 5 から 7 までの定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  を計算する.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり, 関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  を考える. 関数  $\sqrt{x}$  は, 0 以上の実数全体で連続なので, 5 から 7 まで積分可能である. 従って,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  が 0 に収束するならば,  $n \rightarrow \infty$  のとき関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$  に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x} dx .$$

この等式の左辺の極限值を実際に計算するために, リーマン和  $S_n$  を具体的に定める.

関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式を計算するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等差数列にすると後の計算が困難になる.

関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式を計算するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等比数列にする。

関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式を計算するために、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等比数列にする。公比を  $r$  とおく。  $x_n = x_0 r^n$  ,  
 $r^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{7}{5}$  ,  $r = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$  .

関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式を計算するため  
に、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等比数列にする。公比を  $r$  とおく。  $x_n = x_0 r^n$  ,  
 $r^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{7}{5}$  ,  $r = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$  . よって、自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 r^k = 5 \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}^k = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} .$$

関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式を計算するため  
に、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等比数列にする。公比を  $r$  とおく。  $x_n = x_0 r^n$  ,  
 $r^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{7}{5}$  ,  $r = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$  . よって、自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 r^k = 5 \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}^k = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して、

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} - 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n} + \frac{1}{n}} - 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \\ &= 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} . \end{aligned}$$

関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の式を計算するため  
に、数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  を等比数列にする。公比を  $r$  とおく。  $x_n = x_0 r^n$  ,  
 $r^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{7}{5}$  ,  $r = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$  . よって、自然数  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  について

$$x_k = x_0 r^k = 5 \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}^k = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して、

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} - 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n} + \frac{1}{n}} - 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \\ &= 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} . \end{aligned}$$

指数関数  $\left(\frac{7}{5}\right)^x$  は単調増加なので、  $k \leq n$  より  $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \leq \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}$  , よって

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}.$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5},$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 =$$
$$0 ,$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 =$$

$$0 , \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5 \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] = 0 .$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 =$$

$$0 , \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] = 0 . \quad \text{これより, } n \rightarrow \infty$$

のとき関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$

に収束する :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x} dx .$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 =$$

$$0 , \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] = 0 . \quad \text{これより, } n \rightarrow \infty$$

のとき関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$

に収束する :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x} dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 =$$

$$0 , \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] = 0 . \quad \text{これより, } n \rightarrow \infty$$

のとき関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$

に収束する :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x} dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $\xi_k = x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}$  と定める.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1 - \frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 =$$

$$0 , \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] = 0 . \quad \text{これより, } n \rightarrow \infty$$

のとき関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  は定積分  $\int_5^7 \sqrt{x} dx$

に収束する :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x} dx .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  について  $x_k - x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $\xi_k = x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}$  と定める.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1} \\
&\quad \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} = \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^{k-1} = \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^n - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1}
\end{aligned}$$

正の自然数  $n$  及び実数  $a, r$  に対して,  $r \neq 1$  のとき  $\sum_{k=1}^n (ar^{k-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$  .

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^n - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} \\
&= 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^n - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} \\
&= 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} \\
&= \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}) \frac{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} .
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  のときの  $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$  の極限值を考える.  $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$  について,

$n \rightarrow \infty$  のとき分母と分子とが 0 に収束するので, 分母と分子とをある意味で因数分解して約分したい.

$n \rightarrow \infty$  のときの  $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$  の極限值を考える.  $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$  とおく.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^3 = t^3, \quad \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^2 = t^2 \quad \text{なので,}$$

$n \rightarrow \infty$  のときの  $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$  の極限值を考える.  $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$  とおく.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^3 = t^3, \quad \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^2 = t^2 \quad \text{なので,}$$

$$\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{t+1}{t^2+t+1} .$$

$n \rightarrow \infty$  のときの  $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$  の極限值を考える.  $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$  とおく.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^3 = t^3, \quad \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^2 = t^2 \quad \text{なので,}$$

$$\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{t+1}{t^2+t+1}.$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1$  なので,

$n \rightarrow \infty$  のときの  $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$  の極限值を考える.  $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$  とおく.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^3 = t^3, \quad \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^2 = t^2 \quad \text{なので,}$$

$$\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{t+1}{t^2+t+1}.$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2+t+1} = \frac{2}{3}.$$

よって

$$\begin{aligned} \int_5^7 \sqrt{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}) \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} \right\} = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}) \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{14\sqrt{7} - 10\sqrt{5}}{3} . \end{aligned}$$

故に  $\int_5^7 \sqrt{x} dx = \frac{14\sqrt{7} - 10\sqrt{5}}{3} .$

終

**問6.3.3** 関数  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  は 3 から 5 まで積分可能である. 正の各自然数  $n$  に対して,

$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$  である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定める:  $x_0 = 3$ , 自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $x_k = 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k}{n}}$ ,  $\xi_k = x_{k-1} = 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}$ .

$x_k - x_{k-1} = 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k}{n}} - 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} = 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}$  なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\};$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する. よって関数  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき定積分  $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  に収束す

る:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . 定積分  $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  を関数  $\sqrt{x}$  のリーマン和  $S_n$

の極限值として計算せよ.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \right\}^{k-1} = \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\}}{\left( \frac{5}{3} \right)} \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} = \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} = \left( \frac{5}{3} \right) \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 3^{-\frac{1}{2}} 3 \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} = \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}} \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}} = \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}} \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}} = \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}}} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 3^{-\frac{1}{2}} 3 \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} = \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^n - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} \\
&= \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} = \left( \frac{5}{3} \right) \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^n \left[ \left\{ 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right] \\
&= 3^{-\frac{1}{2}} 3 \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} = \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^n - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} \\
&= \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} \\
&= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} .
\end{aligned}$$

$t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}$  とおく.  $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2 = t^2$  なので,

$$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} (\quad) = \quad .$$

$t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}$  とおく.  $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2 = t^2$  なので,

$$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \frac{t^2 - 1}{t - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = t+1 .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} (t+1) = 2 .$$

よって

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} - 1} \right\} \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot 2 \\ &= 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) .\end{aligned}$$

故に  $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) .$

終