## 6.3 定義に従う定積分の計算

定積分の定義を復習する.

定義　実数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ で，関数 $f$ の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = $$

とおく． $S_n$ を表す式を $f$ のリーマン和という． $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 $S_n$ も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が関数 $f$ 及び実数 $a, b$ だけから唯一つに決まるならば，関数 $f$ は $a$ から $b$ まで（定）積分可能であるといい，　　　　　　を $a$ から $b$ までの $f$ の定積分といい， $\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す： $\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad .$

定義　実数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ で，関数 $f$ の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad ,$$

$$S_n =$$

とおく．$S_n$ を表す式を $f$ のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　であるどのようなリーマン和 $S_n$ も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 $f$ 及び実数 $a, b$ だけから唯一つに決まるならば，関数 $f$ は $a$ から $b$ まで（定）積分可能であるといい，　　　　を $a$ から $b$ までの $f$ の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　．

定義　実数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ で，関数 $f$ の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．$S_n$ を表す式を $f$ のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 $S_n$ も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 $f$ 及び実数 $a, b$ だけから唯一つに決まるならば，関数 $f$ は $a$ から $b$ まで（定）積分可能であるといい，　　　　　　　　を $a$ から $b$ までの $f$ の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

**定義**　実数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ で，関数 $f$ の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．$S_n$ を表す式を $f$ のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 $S_n$ も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 $f$ 及び実数 $a, b$ だけから唯一つに決まるならば，関数 $f$ は $a$ から $b$ まで（定）積分可能であるといい，$f$ のリーマン和 $S_n$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を $a$ から $b$ までの $f$ の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 $f$ が $a$ から $b$ まで積分可能であるとき，関数 $f$ は $b$ から $a$ まで積分可能であるといい，$f$ の $b$ から $a$ までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ .

リーマン和の極限値として定積分を計算してみる.

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する.

例 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．$f(\xi_k) = c$ なので，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{c(x_k - x_{k-1})\} = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$$

$\boxed{例}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える． $f(\xi_k) = c$ なので，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{c(x_k - x_{k-1})\} = c\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(\qquad\qquad) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．$f(\xi_k) = c$ なので，

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{c(x_k - x_{k-1})\} = c\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\
&= c(b-a) \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．$f(\xi_k) = c$ なので，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b-a)\ . \end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x)=c$ のリーマン和は常に $S_n = c(b-a)$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．$f(\xi_k) = c$ なので，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{c(x_k - x_{k-1})\} = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b-a) \ . \end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x)=c$ のリーマン和は常に $S_n = c(b-a)$ である．よって

$$\int_a^b c\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\{c(b-a)\} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定数 $c$ に対して定数関数 $f(x)=c$ の定積分を計算する．定数 $a$ と $b$ とについて $a \leq b$ とする．正の各自然数 $n$ に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，$f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．$f(\xi_k)=c$ なので，

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{c(x_k - x_{k-1})\} = c\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b-a) \ .\end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x)=c$ のリーマン和は常に $S_n = c(b-a)$ である．よって

$$\int_a^b c\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\{c(b-a)\} = c(b-a) \ .$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) \ .$$

特に，$a=0$ とすると

$$\int_0^b c\,dx = bc \ .$$

終

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) \ .$$

特に，$a=0$ とすると

$$\int_0^b c\,dx = bc \ .$$

$\boxed{終}$

このように掛け算は定数関数の定積分である．定数関数の定積分以外にも様々な関数の定積分があるので，定積分は掛け算の拡張である．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限値として計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限値として計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり, 関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ を考える.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限値として計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり, 関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 $x^2$ は, 実数全体で連続なので, $2$ から $5$ まで積分可能である.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限値として計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり, 関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 $x^2$ は, 実数全体で連続なので, $2$ から $5$ まで積分可能である. 従って, $n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が $0$ に収束するならば, 関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ は関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ である:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限値として計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり, 関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 $x^2$ は, 実数全体で連続なので, $2$ から $5$ まで積分可能である. 従って, $n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{\, x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\,\}$ が $0$ に収束するならば, 関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は関数 $x^2$ の定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ である:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx\ .$$

この等式の左辺の極限値を実際に計算するために, リーマン和 $S_n$ を具体的に定める.

関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を等差数列にする.

関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を等差数列にする．公差を $d$ とおくと，$x_n=x_0+dn$ なので $d=\dfrac{x_n-x_0}{n}=\dfrac{5-2}{n}=\dfrac{3}{n}$ ．

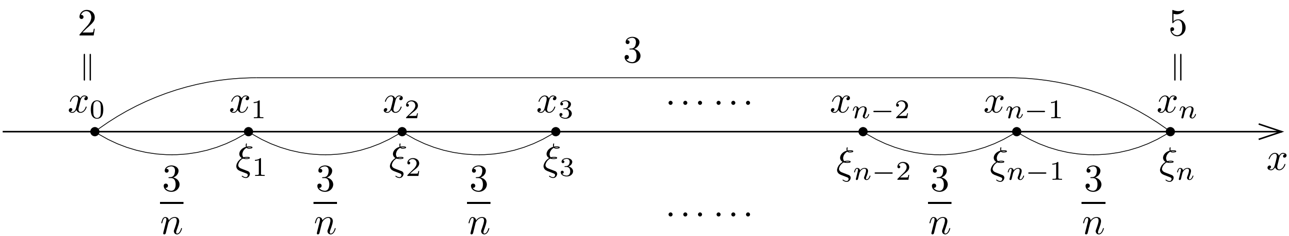
関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を等差数列にする．公差を $d$ とおくと，$x_n = x_0 + dn$ なので $d = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{5-2}{n} = \dfrac{3}{n}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k \ .$$

関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を等差数列にする．公差を $d$ とおくと，$x_n = x_0 + dn$ なので $d = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{5-2}{n} = \dfrac{3}{n}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k \ .$$

更に自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $\xi_k = x_k = 2 + \dfrac{3}{n}k$ と定める．次の図のようになる.



$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}\ ,\ x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}\ ,\ x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}\ , \dots ,\ x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0 \,, x_2 - x_1 \,, x_3 - x_2 \,, \dots , x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n}\ ,$$

$x_1 - x_0 = d = \dfrac{3}{n}$ ， $x_2 - x_1 = d = \dfrac{3}{n}$ ， $x_3 - x_2 = d = \dfrac{3}{n}$ ，…， $x_n - x_{n-1} = d = \dfrac{3}{n}$

なので，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ \ldots\,, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} \ ,$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ .

$x_1 - x_0 = d = \dfrac{3}{n}$ , $x_2 - x_1 = d = \dfrac{3}{n}$ , $x_3 - x_2 = d = \dfrac{3}{n}$ , … , $x_n - x_{n-1} = d = \dfrac{3}{n}$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \ldots , x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} ,$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ . これより, 関数 $x^2$ のリーマン和

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

$x_1 - x_0 = d = \dfrac{3}{n}$, $x_2 - x_1 = d = \dfrac{3}{n}$, $x_3 - x_2 = d = \dfrac{3}{n}$, …, $x_n - x_{n-1} = d = \dfrac{3}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} ,$$

よって $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ . これより, 関数 $x^2$ のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して, $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \dfrac{3}{n} k$ ,

$x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{3}{n}$ なので,

$x_1 - x_0 = d = \dfrac{3}{n}$ , $x_2 - x_1 = d = \dfrac{3}{n}$ , $x_3 - x_2 = d = \dfrac{3}{n}$ , … , $x_n - x_{n-1} = d = \dfrac{3}{n}$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} \ ,$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0$ . これより, 関数 $x^2$ のリーマン和

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して, $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \dfrac{3}{n}k$ ,

$x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{3}{n}$ なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2\frac{3}{n}\right\} = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2$$

$x_1 - x_0 = d = \dfrac{3}{n}$ , $x_2 - x_1 = d = \dfrac{3}{n}$ , $x_3 - x_2 = d = \dfrac{3}{n}$ , … , $x_n - x_{n-1} = d = \dfrac{3}{n}$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \dots , x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} ,$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ . これより, 関数 $x^2$ のリーマン和

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \dfrac{3}{n}k$ ,

$x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{3}{n}$ なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(4 + \frac{12}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right) .$$

$$S_n = \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

$$S_n = \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$
$$= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\}$$

定数 $c$ 及び正の自然数 $n$ について，

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \ .$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + 6(n+1) + \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} \\
&= 12 + 18\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + 6(n+1) + \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} \\
&= 12 + 18\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ とするので

$$
= 12 + 18\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \quad .
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + 6(n+1) + \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} \\
&= 12 + 18\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= 12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\int_2^5 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + 6(n+1) + \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} \\
&= 12 + 18\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= 12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\int_2^5 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + 6(n+1) + \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} \\
&= 12 + 18\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= 12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_2^5 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\} \\
&= 12 + 18(1+0) + \frac{9}{2}(2+0+0) = 12+18+9 \\
&= 39 \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 4 + \frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{4n + 6(n+1) + \frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} \\
&= 12 + 18\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= 12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_2^5 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{12 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\} \\
&= 12 + 18(1+0) + \frac{9}{2}(2+0+0) = 12+18+9 \\
&= 39 \ .
\end{aligned}
$$

故に　$\int_2^5 x^2 dx = 39$ .

終

$\boxed{問6.3.1}$ 関数 $x^2$ は $1$ から $4$ まで積分可能である．正の各自然数 $n$ に対して，

$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定める：$x_0 = 1$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k = \xi_k = 1 + \dfrac{3}{n}k$ ．

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき $0$ に収束する．よって関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_1^4 x^2 dx$ に収束する：$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4 x^2 dx$ ．定積分 $\int_1^4 x^2 dx$ を関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n$ の極限値として計算せよ．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big(\qquad\qquad\Big)^2\quad\Big\}$$

$\boxed{\text{問6.3.1}}$ 関数 $x^2$ は $1$ から $4$ まで積分可能である．正の各自然数 $n$ に対して，

$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定める： $x_0 = 1$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k = \xi_k = 1 + \dfrac{3}{n}k$ ．

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき $0$ に収束する．よって関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_1^4 x^2 dx$ に収束する：$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4 x^2 dx$ ．定積分 $\int_1^4 x^2 dx$ を関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n$ の極限値として計算せよ．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \right\} \\
&= \\
&= \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad .
\end{aligned}
$$

$$
\int_1^4 x^2 dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left\{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \right\}
$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\}$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

$$= \frac{3}{n}\left\{n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$$\int_1^4 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= 3 + \frac{9(n+1)}{n} + \frac{9(2n^2+3n+2)}{2n^2} \\
&= 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\int_1^4 x^2 dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left\{ 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{3}{n}k\right)^2\frac{3}{n}\right\} \\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{6}{n}k+\frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}1+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right) \\
&= \frac{3}{n}\left\{n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} \\
&= 3+\frac{9(n+1)}{n}+\frac{9(2n^2+3n+2)}{2n^2} \\
&= 3+9\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^4 x^2dx &= \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{3+9\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\} \\
&= 3+9(1+0)+\frac{9}{2}(2+0+0) = 3+9+9 \\
&= 21 \ .
\end{aligned}
$$

故に $\int_1^4 x^2dx = 21$ .

終

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 $2^x$ の $3$ から $8$ までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 $2^x$ の $3$ から $8$ までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び実数 $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり,
指数関数 $2^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考える.

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 $2^x$ の $3$ から $8$ までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を計算する．

正の各自然数 $n$ に対して，

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，指数関数 $2^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．指数関数 $2^x$ は，実数全体で連続なので，$3$ から $8$ まで積分可能である．

$\boxed{\text{例}}$ 指数関数 $2^x$ の $3$ から $8$ までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり,指数関数 $2^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考える.指数関数 $2^x$ は,実数全体で連続なので,$3$ から $8$ まで積分可能である.従って,$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が $0$ に収束するならば,$n \to \infty$ のとき指数関数 $2^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx \ .$$

$\boxed{例}$ 指数関数 $2^x$ の $3$ から $8$ までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり,指数関数 $2^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考える.指数関数 $2^x$ は,実数全体で連続なので,$3$ から $8$ まで積分可能である.従って,$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が $0$ に収束するならば,$n \to \infty$ のとき指数関数 $2^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx \ .$$

この等式の左辺の極限値を実際に計算するために,リーマン和 $S_n$ を具体的に定める.

関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等差数列にする.

関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0 \le k \le n}$ を等差数列にする．公差を $d$ とおくと，$x_n = x_0 + dn$ なので $d = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{8-3}{n} = \dfrac{5}{n}$ ．

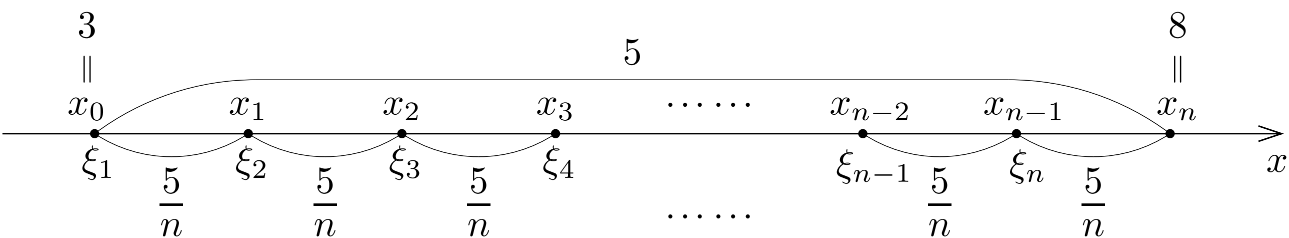
関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等差数列にする．公差を $d$ とおくと，$x_n = x_0 + dn$ なので $d = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{8-3}{n} = \dfrac{5}{n}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 3 + \frac{5}{n}k \ .$$

関数 $x^2$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式をなるべく簡単にするために，数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を等差数列にする．公差を $d$ とおくと，$x_n = x_0 + dn$ なので $d = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{8-3}{n} = \dfrac{5}{n}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 3 + \frac{5}{n}k \ .$$

更に自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \dfrac{5}{n}(k-1)$ と定める．次の図のようになる．



自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{5}{n}$ なので，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} \ ;$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} \;;$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$ .

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_n-x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} \ ;$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$ . これより,指数関数 $2^x$ のリーマン和 $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_3^8 2^x dx \ .$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{5}{n}$ なので，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0\,, x_2-x_1\,, x_3-x_2\,, \ldots, x_n-x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n}\ ;$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$ ． これより，指数関数 $2^x$ のリーマン和 $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_3^8 2^x dx\ .$$

自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について，$\xi_k=x_{k-1}=3+\dfrac{5}{n}(k-1)$ ，

$x_k-x_{k-1}=\dfrac{5}{n}$ なので，

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=d=\dfrac{5}{n}$ なので，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_n-x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} \ ;$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$ ． これより，指数関数 $2^x$ のリーマン和 $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \int_3^8 2^x dx \ .$$

自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について，$\xi_k=x_{k-1}=3+\dfrac{5}{n}(k-1)$ ，

$x_k-x_{k-1}=\dfrac{5}{n}$ なので，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{2^{3+\frac{5}{n}(k-1)}\frac{5}{n}\right\} = \frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)}\right\} \\ &= \frac{5\cdot 2^3}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{5}{n}(k-1)} = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} \ . \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}$$

正の自然数 $n$ 及び実数 $a, r$ に対して，$r \neq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1}) = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ .

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n} - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} \ .$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく.

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ , $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1+t$ , 両辺の自然対数を考えて
$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ , $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}}=1+t$ , 両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ , $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t=2^{\frac{5}{n}}-1\to 2^0-1=0$ .

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく． $2^{\frac{5}{n}}=1+t$ ，両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}}=\ln(1+t)$ ， $\frac{5}{n}\ln 2=\ln(1+t)$ ， $\frac{1}{n}=\frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので，

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t=2^{\frac{5}{n}}-1\to 2^0-1=0$ ．対数関数 $\ln x$ は連続なので，

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}}=1+t$ , 両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}}=\ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2=\ln(1+t)$ , $\frac{1}{n}=\frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t=2^{\frac{5}{n}}-1\to 2^0-1=0$ . 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ , $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \to 2^0 - 1 = 0$ . 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\begin{aligned}\int_3^8 2^x dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{1}{t}\ln(1+t)\right\}\\ &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}\end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n}\frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ , 両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ , $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t} .$$

$n \to \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \to 2^0 - 1 = 0$ . 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{1}{t}\ln(1+t)\right\}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}}-1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1+t$ , 両辺の自然対数を考えて
$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ , $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ , $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}}-1 \to 2^0-1 = 0$ . 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{1}{t}\ln(1+t)\right\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln e$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$S_n = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} \ .$$

変数 $t$ を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ ，両辺の自然対数を考えて

$\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ ， $\frac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ ， $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t} \ .$$

$n\to\infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \to 2^0 - 1 = 0$ . 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\begin{aligned}\int_3^8 2^x dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{\ln(1+t)}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\frac{1}{t}\ln(1+t)\right\}\\ &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln e\\ &= \frac{248}{\ln 2} \ .\end{aligned}$$

$\ln e = \log_e e = 1$

故に　$\int_3^8 2^x dx = \dfrac{248}{\ln 2}$　.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.3.2}$ 指数関数 $3^x$ は $2$ から $4$ まで積分可能である．正の各自然数 $n$ に対して，

$$2 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定める： $x_0 = 2$ ， 自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $x_k = 2 + \dfrac{2}{n}k$ ， $\xi_k = x_{k-1} = 2 + \dfrac{2}{n}(k-1)$ ． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \dfrac{2}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n} ;$$

これは $n \to \infty$ のとき $0$ に収束する．よって関数 $3^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_2^4 3^x dx$ に収束する： $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^4 3^x dx$ ． 定積分 $\int_2^4 3^x dx$ を関数 $3^x$ のリーマン和 $S_n$ の極限値として計算せよ．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\Big\{ \qquad\qquad\qquad \Big\} =$$

$\boxed{問6.3.2}$ 指数関数 $3^x$ は $2$ から $4$ まで積分可能である．正の各自然数 $n$ に対して，

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定める： $x_0 = 2$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $x_k = 2 + \dfrac{2}{n}k$ ， $\xi_k = x_{k-1} = 2 + \dfrac{2}{n}(k-1)$ ． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \dfrac{2}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき $0$ に収束する．よって関数 $3^x$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_2^4 3^x dx$ に収束する： $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^4 3^x dx$ ．定積分 $\int_2^4 3^x dx$ を関数 $3^x$ のリーマン和 $S_n$ の極限値として計算せよ．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$= \frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1} = \frac{18}{n}\frac{\left(\qquad\right)^{\quad} - 1}{\qquad\qquad} = \frac{18}{n}\frac{\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{18}{n}\frac{\qquad}{\qquad\qquad}$$

$$= \frac{\qquad}{n}\frac{1}{\qquad\qquad}\ .$$

変数 $t$ を $t = \qquad\qquad$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = \qquad\qquad$, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(\qquad)$,

$\frac{2}{n}\qquad = \ln(\qquad)$, $\frac{\qquad}{n} = \qquad\qquad$ なので,

$$S_n = \frac{\qquad}{n}\frac{1}{\qquad\qquad} = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$n \to \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \to 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\qquad\qquad\qquad\right\} = \qquad \ln\left\{\qquad\qquad\right\} = \qquad \ln$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$=\frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1}=\frac{18}{n}\frac{\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{n}-1}{3^{\frac{2}{n}}-1}=\frac{18}{n}\frac{\qquad}{3^{\frac{2}{n}}-1}=\frac{18}{n}\frac{\qquad}{3^{\frac{2}{n}}-1}$$

$$=\frac{\qquad}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}}-1}\ .$$

変数 $t$ を $t=\qquad\qquad$ とおく. $3^{\frac{2}{n}}=\qquad$, $\ln 3^{\frac{2}{n}}=\ln(\qquad)$,

$\frac{2}{n}\qquad=\ln(\qquad)$, $\frac{\qquad}{n}=\qquad\qquad$ なので,

$$S_n=\frac{\qquad}{n}\frac{1}{\qquad}=\qquad\qquad=\qquad\qquad=\qquad\qquad.$$

$n\to\infty$ のとき $t=3^{\frac{2}{n}}-1\to 3^0-1=0$ なので,

$$\int_2^4 3^x dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{t\to 0}\left\{\qquad\qquad\right\}=\qquad\ln\left\{\qquad\qquad\right\}=\qquad\ln$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$= \frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1} = \frac{18}{n}\frac{\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{n} - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1}$$

$$= \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1}\ .$$

変数 $t$ を $t =$ 　　　　　　 とおく. $3^{\frac{2}{n}} =$ 　　　　　, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln($ 　　　 $)$ ,

$\frac{2}{n}$ 　　 $= \ln($ 　　　 $)$ , $\frac{144}{n} =$ 　　　　　　　　　　 なので,

$$S_n = \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$n \to \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \to 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{ \qquad\qquad \right\} = \qquad \ln\left\{ \qquad\qquad \right\} = \qquad \ln$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{3^{\xi_k}\left(x_k - x_{k-1}\right)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$= \frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1} = \frac{18}{n}\frac{\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1}$$

$$= \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1}\ .$$

変数 $t$ を $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$ , $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1+t)$ ,

$\dfrac{2}{n}\ln 3 = \ln(1+t)$ , $\dfrac{144}{n} = \dfrac{72\ln(1+t)}{\ln 3}$ なので,

$$S_n = \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$n \to \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \to 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\qquad\qquad\right\} = \qquad \ln\left\{\qquad\qquad\right\} = \qquad \ln$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$= \frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1} = \frac{18}{n}\frac{\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1}$$

$$= \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \ .$$

変数 $t$ を $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$ , $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1+t)$ ,

$\frac{2}{n}\ln 3 = \ln(1+t)$ , $\frac{144}{n} = \frac{72\ln(1+t)}{\ln 3}$ なので,

$$S_n = \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{72\ln(1+t)}{\ln 3}\cdot\frac{1}{t} = \frac{72}{\ln 3}\cdot\frac{1}{t}\ln(1+t) = \frac{72}{\ln 3}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$n \to \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \to 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{72}{\ln 3}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \qquad \ln\left\{\lim_{t\to 0} \qquad \right\} = \qquad \ln$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)}\frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\}$$

$$= \frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1} = \frac{18}{n}\frac{\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n}\frac{3^2-1}{3^{\frac{2}{n}}-1} = \frac{18}{n}\frac{8}{3^{\frac{2}{n}}-1}$$

$$= \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}}-1} \ .$$

変数 $t$ を $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$ , $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1+t)$ ,

$\frac{2}{n}\ln 3 = \ln(1+t)$ , $\frac{144}{n} = \frac{72\ln(1+t)}{\ln 3}$ なので,

$$S_n = \frac{144}{n}\frac{1}{3^{\frac{2}{n}}-1} = \frac{72\ln(1+t)}{\ln 3}\cdot\frac{1}{t} = \frac{72}{\ln 3}\cdot\frac{1}{t}\ln(1+t) = \frac{72}{\ln 3}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \ .$$

$n \to \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \to 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{72}{\ln 3}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{72}{\ln 3}\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{72}{\ln 3}\ln e$$

$$\int_2^4 3^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{72}{\ln 3}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{72}{\ln 3}\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{72}{\ln 3}\ln e$$

$$= \frac{72}{\ln 3} \ .$$

故に $\int_2^4 3^x dx = \dfrac{72}{\ln 3}$ . 終

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\sqrt{x}$ の $5$ から $7$ までの定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\sqrt{x}$ の 5 から 7 までの定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ を計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び実数 $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり, 関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{\xi_k}\,(x_k - x_{k-1}) \right\}$ を考える.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\sqrt{x}$ の $5$ から $7$ までの定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ を計算する．

正の各自然数 $n$ に対して，

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び実数 $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\right\}$ を考える．関数 $\sqrt{x}$ は，$0$ 以上の実数全体で連続なので，$5$ から $7$ まで積分可能である．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\sqrt{x}$ の 5 から 7 までの定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ を計算する.

正の各自然数 $n$ に対して,

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり, 関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 $\sqrt{x}$ は, 0 以上の実数全体で連続なので, 5 から 7 まで積分可能である. 従って, $n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, $n \to \infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x}\,dx \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\sqrt{x}$ の $5$ から $7$ までの定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ を計算する．

正の各自然数 $n$ に対して，

$$5 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 7$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び実数 $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考える．関数 $\sqrt{x}$ は，$0$ 以上の実数全体で連続なので，$5$ から $7$ まで積分可能である．従って，$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\}$ が $0$ に収束するならば，$n \to \infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x}\,dx \ .$$

この等式の左辺の極限値を実際に計算するために，リーマン和 $S_n$ を具体的に定める．

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を等差数列にすると後の計算が困難になる.

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等比数列にする．

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0 \le k \le n}$ を等比数列にする．公比を $r$ とおく． $x_n = x_0 r^n$ ，

$r^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{7}{5}$ ， $r = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$ ．

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を等比数列にする．公比を $r$ とおく． $x_n = x_0 r^n$ ， $r^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{7}{5}$ ， $r = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について

$$x_k = x_0 r^k = 5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^k = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} .$$

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等比数列にする．公比を $r$ とおく． $x_n = x_0 r^n$ ， $r^n = \dfrac{x_n}{x_0} = \dfrac{7}{5}$ ， $r = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について

$$x_k = x_0 r^k = 5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^k = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}} - 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}} - 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}} \\ &= 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} . \end{aligned}$$

関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ の式を計算するために，数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を等比数列にする．公比を $r$ とおく． $x_n=x_0r^n$ ，$r^n=\dfrac{x_n}{x_0}=\dfrac{7}{5}$ ， $r=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$ ．よって，自然数 $k=0,1,2,3,\ldots,n$ について

$$x_k=x_0r^k=5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^k=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}}.$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\begin{aligned}x_k-x_{k-1}&=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k}{n}}-5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}}-5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\\&=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}.\end{aligned}$$

指数関数 $\left(\dfrac{7}{5}\right)^x$ は単調増加なので， $k\leq n$ より $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\leq\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ ，よって

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}=5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}.$$

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 \, , x_2 - x_1 \, , x_3 - x_2 \, , \ \ldots \, , x_n - x_{n-1} \} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 \,, x_2 - x_1 \,, x_3 - x_2 \,, \ \ldots \,, x_n - x_{n-1} \} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} .$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1} = \frac{7}{5} \ ,$$

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1} = \frac{7}{5}, \quad \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^{0} - 1 =$$

$0$ ,

$\delta_n = \max\{\, x_1 - x_0\,,\, x_2 - x_1\,,\, x_3 - x_2\,,\ \ldots\,,\, x_n - x_{n-1}\,\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ .

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1} = \frac{7}{5}$ ,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^{0} - 1 = 0$ ，よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\left[5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right] = 0$ .

$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \ldots , x_n - x_{n-1} \} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\}$ .

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1} = \frac{7}{5}$ , $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^{0} - 1 = 0$ , よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\left[5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right] = 0$ . これより, $n \to \infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x}\,dx \ .$$

$\delta_n = \max\{\, x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,,\ \ldots\,, x_n - x_{n-1}\,\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ .

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1} = \frac{7}{5}$ , $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^{0} - 1 = 0$ , よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\left[5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right] = 0$ . これより, $n \to \infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}\,(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x}\,dx \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ .

$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \ldots , x_n - x_{n-1} \} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ .

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5}$ ， $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 - 1 = 0$ ，よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\left[5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right] = 0$ ．これより, $n \to \infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x}\,dx \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ .

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $\xi_k = x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}$ と定める.

$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1} = \frac{7}{5}$ , $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = \left(\frac{7}{5}\right)^{0} - 1 = 0$ ，よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\left[5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right] = 0$ . これより, $n \to \infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_5^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_5^7 \sqrt{x}\,dx \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ .

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $\xi_k = x_{k-1} = 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}$ と定める.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left[\left\{5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right\}^{\frac{1}{2}} 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{ \sqrt{\xi_k} \, (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1}$$

$$\left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} = \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^{k-1} = \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left[\left\{5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right\}^{\frac{1}{2}} 5\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\right]$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} 5\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}\right\}^{k-1} = 5\sqrt{5}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\frac{\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}\right\}^{n} - 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$$

正の自然数 $n$ 及び実数 $a, r$ に対して, $r \neq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ .

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{n} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$$

$$= 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{ \sqrt{\xi_k} (x_k - x_{k-1}) \} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{\frac{1}{2}} 5 \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} 5 \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{k-1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} \right\}^{n} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$$

$$= 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = 5\sqrt{5} \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$$

$$= \left\{ \left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}) \frac{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left( \frac{7}{5} \right)^{\frac{3}{2n}} - 1} \; .$$

$n \to \infty$ のときの $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$ の極限値を考える. $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$ について,

$n \to \infty$ のとき分母と分子とが $0$ に収束するので, 分母と分子とをある意味で因数分解して約分したい.

$n \to \infty$ のときの $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$ の極限値を考える．$t = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく．

$\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^3 = t^3$ ，$\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2 = t^2$ なので，

$n \to \infty$ のときの $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}$ の極限値を考える. $t=\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく.

$\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}=\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^3=t^3$ , $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2=t^2$ なので,

$$\frac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}=\frac{t^2-1}{t^3-1}=\frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{t+1}{t^2+t+1} .$$

$n \to \infty$ のときの $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$ の極限値を考える. $t = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく.

$\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^3 = t^3$ , $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2 = t^2$ なので,

$$\frac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{t+1}{t^2+t+1} .$$

$n \to \infty$ のとき $t = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \to \left(\dfrac{7}{5}\right)^0 = 1$ なので,

$n \to \infty$ のときの $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1}$ の極限値を考える． $t = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく．

$\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} = \left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^3 = t^3$ ， $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2 = t^2$ なので，

$$\frac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \frac{t^2-1}{t^3-1} = \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{t+1}{t^2+t+1} .$$

$n \to \infty$ のとき $t = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2n}} \to \left(\dfrac{7}{5}\right)^0 = 1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}} - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t^2+t+1} = \frac{2}{3} .$$

よって

$$\int_5^7 \sqrt{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{(7\sqrt{7}-5\sqrt{5})\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{3}{2n}}-1}\right\} = (7\sqrt{7}-5\sqrt{5})\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{14\sqrt{7}-10\sqrt{5}}{3}\ .$$

故に　$\displaystyle\int_5^7 \sqrt{x}\,dx = \frac{14\sqrt{7}-10\sqrt{5}}{3}\ .$ 終

$\boxed{\text{問}6.3.3}$ 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $3$ から $5$ まで積分可能である．正の各自然数 $n$ に対して，$3 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 5$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定める： $x_0 = 3$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $x_k = 3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k}{n}}$ ， $\xi_k = x_{k-1} = 3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}$ ．$x_k - x_{k-1} = 3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k}{n}} - 3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} = 3\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\};$$

これは $n \to \infty$ のとき $0$ に収束する．よって関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のリーマン和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\xi_k}}(x_k - x_{k-1})\right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ に収束する： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ．定積分 $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ を関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $S_n$ の極限値として計算せよ．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$= \qquad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \qquad \right\}^{k-1} = \qquad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\}}{\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$= \qquad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \qquad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\qquad}{\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$= \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\qquad}{\left(\frac{5}{3}\right)} = ( \qquad ) \frac{\left(\frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} \; .$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}} 3 \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} = \quad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\}}{\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$= \quad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \quad \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\qquad}{\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$= \left\{ \left(\frac{5}{3}\right) \qquad \right\} \frac{\qquad}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \left( \qquad \right) \frac{\left(\frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} \quad .$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \left\{ 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \right\}^{-\frac{1}{2}} 3 \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{k-1}{n}} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \right]$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}} 3 \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{k-1} = \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\}^{n} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1}$$

$$= \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1} = \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 1}{\left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1}$$

$$= \left\{ \left( \frac{5}{3} \right) \qquad \right\} \frac{\qquad}{\left( \frac{5}{3} \right)} = ( \qquad ) \frac{\left( \frac{5}{3} \right)}{\left( \frac{5}{3} \right)} \; .$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\xi_k}}(x_k-x_{k-1})\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}3\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{k-1}{n}}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\right]$$

$$=3^{-\frac{1}{2}}3\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^{k-1}=\sqrt{3}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^{n}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}$$

$$=\sqrt{3}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}=\sqrt{3}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}$$

$$=\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}\ .$$

$t=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく. $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2=t^2$ なので,

$$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}=\frac{\qquad}{\qquad}=\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}=\qquad\qquad.$$

$n\to\infty$ のとき $t=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\to\left(\frac{5}{3}\right)^{0}=1$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}=\lim_{t\to1}(\qquad\qquad)=\qquad.$$

$t=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}$ とおく. $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}^2=t^2$ なので,

$$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}=\frac{t^2-1}{t-1}=\frac{(t+1)(t-1)}{t-1}=t+1\ .$$

$n\to\infty$ のとき $t=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}\to\left(\frac{5}{3}\right)^{0}=1$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}=\lim_{t\to1}(t+1)=2\ .$$

よって

$$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2n}}-1}\right\}$$

$$= \left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\cdot 2$$

$$= 10\sqrt{5}-6\sqrt{3}\ .$$

故に $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 10\sqrt{5}-6\sqrt{3}\ .$ $\boxed{\text{終}}$