6.8 定積分と不定積分

関数 F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表す：

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \ .$$

関数 F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表す：

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

変数 x に代入することが明らかなときは，$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ を単に $\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$ と略す：

$$\Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

関数 F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表す：

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

変数 x に代入することが明らかなときは，$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ を単に $\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$ と略す：

$$\Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

例えば次のようになる.

$$\Big[\cos x\Big]_{2}^{5} = \Big[\cos x\Big]_{x=2}^{x=5} = \cos 5 - \cos 2 \ .$$

$$\Big[x^2-3x\Big]_{2}^{-1} = \Big[x^2-3x\Big]_{x=2}^{x=-1} = (-1)^2-3\cdot(-1)-(2^2-3\cdot 2) = 6 \ .$$

例えば，$\left[\sin x+5\right]_{x=3}^{x=7}$ は $\left[\sin x\right]_{x=3}^{x=7}$ と等しい：

$$\left[\sin x+5\right]_{x=3}^{x=7} = \sin 7+5-(\sin 3+5) = \sin 7-\sin 3 = \left[\sin x\right]_{x=3}^{x=7} .$$

例えば，$\Big[\sin x+5\Big]_{x=3}^{x=7}$ は $\Big[\sin x\Big]_{x=3}^{x=7}$ と等しい：

$$\Big[\sin x+5\Big]_{x=3}^{x=7} = \sin 7+5-(\sin 3+5) = \sin 7-\sin 3 = \Big[\sin x\Big]_{x=3}^{x=7} .$$

一般的に述べる：関数 F の定義域に属す定数 a と b 及び，変数 x と無関係な定数 C について，

$$\Big[F(x)+C\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)+C-\{F(a)+C\} = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

6.4 節において次の微分積分の基本定理を述べた：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

6.4 節において次の微分積分の基本定理を述べた：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属するある区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

実数 a と b とが属するある区間において関数 f は連続であるとする．**6.1** 節で述べたように f は a から b まで積分可能である．**6.5** 節で述べたように f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．

6.4 節において次の微分積分の基本定理を述べた：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとする．**6.1** 節で述べたように f は a から b まで積分可能である．**6.5** 節で述べたように f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある． $F(x) = \int f(x)\,dx$ とおく．

6.4 節において次の微分積分の基本定理を述べた：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとする．**6.1** 節で述べたように f は a から b まで積分可能である．**6.5** 節で述べたように f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある． $F(x)=\int f(x)\,dx$ とおく．**6.5** 節で述べたように $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\{\int f(x)\,dx\}=f(x)$ なので，微積分の基本定理より $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

6.4 節において次の微分積分の基本定理を述べた：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとする．**6.1** 節で述べたように f は a から b まで積分可能である．**6.5** 節で述べたように f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある． $F(x) = \int f(x)\,dx$ とおく．**6.5** 節で述べたように $\dfrac{d}{dx}F(x) = \dfrac{d}{dx}\{\int f(x)\,dx\} = f(x)$ なので，微積分の基本定理より $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

6.4 節において次の微分積分の基本定理を述べた：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとする．**6.1** 節で述べたように f は a から b まで積分可能である．**6.5** 節で述べたように f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある． $F(x) = \int f(x)\,dx$ とおく．**6.5** 節で述べたように $\dfrac{d}{dx}F(x) = \dfrac{d}{dx}\{\int f(x)\,dx\} = f(x)$ なので，微積分の基本定理より $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \,=\, F(b) - F(a) \,=\, \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \,=\, \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

定理　実数 a と b とが属する区間において関数 f が連続であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx \,=\, \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

定理　実数 a と b とが属する区間において関数 f が連続であるとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} .$$

　この定理は，不定積分から定積分を計算するために微分積分の基本定理を述べ直したものである.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する.

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ （ C は積分定数） なので,

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\int \cos x\,dx\right]_4^9 = \left[\sin x + C\right]_4^9 \;;$$

例 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する.

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ （ C は積分定数） なので,

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\int \cos x\,dx\right]_4^9 = \left[\sin x + C\right]_4^9 \ ;$$

先に述べたように $\left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9$ なので,

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9 = \sin 9 - \sin 4 \ .$$

終

例 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する．

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ （ C は積分定数） なので，

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\int \cos x\,dx\right]_4^9 = \left[\sin x + C\right]_4^9 \ ;$$

先に述べたように $\left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9$ なので，

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9 = \sin 9 - \sin 4\ .$$ 終

このように，定積分の計算において不定積分の積分定数 C は相殺されて消えてしまうので，積分定数は定積分の計算結果に影響しない．なので，定積分の計算において，普通は不定積分の積分定数を省略する．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int(y^2-3y+2)\,dy = \frac{1}{3}y^3 - 3\,\frac{1}{2}y^2 + 2y + C = \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + C \ .$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int(y^2-3y+2)\,dy = \frac{1}{3}y^3-3\,\frac{1}{2}y^2+2y+C = \frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y+C\ .$$

よって,

$$\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3}-6+4-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-2\right)$$

$$= \frac{9}{2}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 6.8.1}$ 定積分 $\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int(2y^2-5y+3)\,dy =$$

よって,

$$\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]_{-2}^{4}$$

$\boxed{問 6.8.1}$ 定積分 $\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int(2y^2-5y+3)\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}y^3-5\cdot\frac{1}{2}y^2+3y+C = \frac{2}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2+3y+C \ .$$

よって,

$$\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]_{-2}^{4}$$

$\boxed{\text{問}6.8.1}$ 定積分 $\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算せよ．

積分定数を C とおく．

$$\int(2y^2-5y+3)\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}y^3-5\cdot\frac{1}{2}y^2+3y+C = \frac{2}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2+3y+C \ .$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy &= \left[\frac{2}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2+3y\right]_{-2}^{4}\\ &= \frac{128}{3}-40+12-\left(-\frac{16}{3}-10-6\right)\\ &= 36 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

例 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

例 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

例 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

0 以外の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

例 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C \ .$$

よって

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \left[\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]_{-2}^{\frac{2}{3}}$$

例 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}}+C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+C\ .$$

よって

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \left[\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right]_{-2}^{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}(-\sqrt{3})\right\}$$

$$= \sqrt{3}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}\ .$$

終

$\boxed{\text{問}6.8.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \quad \int \frac{1}{x^2+\qquad}\,dx =$$

よって

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=$$

$\boxed{問6.8.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \frac{6}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

よって

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \Big[\qquad \qquad \qquad \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=$$

$\boxed{問 6.8.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \frac{6}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C\ .$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx &= \left[\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \sqrt{3}\left\{\tan^{-1}1 - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{5\sqrt{3}\,\pi}{12}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する.

例 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

例 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

正の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \quad .$$

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \quad .$$

よって，

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

よって，

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left\{\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\sin^{-1}1 + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{6}\,\pi}{12} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.8.3}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \underline{\qquad\qquad} \int \frac{1}{\sqrt{\qquad - x^2}}\,dx =$$

よって,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=$$

$\boxed{問6.8.3}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int\sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}-x^2}}\,dx = 2\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}}+C$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\,x\right)+C\ .$$

よって,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=$$

$\boxed{\text{問}6.8.3}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int\sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}-x^2}}\,dx=2\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}}+C$$

$$=2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\,x\right)+C\ .$$

よって,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx=\left[2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\,x\right)\right]_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=2\left\{\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\pi\ .$$

$\boxed{\text{終}}$