6.10 定積分を用いる極限計算

定積分の定義を復習する.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，　　　　　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad$ ．

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = $$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，　　　　　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad$.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，　　　　　　　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　　．

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ とする．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．定積分の定義より，$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても，リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても，リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても，リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （$k=1,2,3,\ldots,n$）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （$k=1,2,3,\ldots,n$）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f の定積分を計算するために，しばしば，f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ を用いる．

定積分はリーマン和の極限値である．微分積分の基本定理を用いると，多くの場合，リーマン和の極限値を計算するより，不定積分を用いて定積分を計算する方が楽である．それ故，逆に，リーマン和の極限値を計算するのに定積分を用いることがある．

等差数列について次のことがいえた：第 0 項から始まる数列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ 及び定数 d について，$\{a_k\}_{k\geq 0}$ が公差が d である等差数列であることと，各自然数 k について $a_k = a_0 + dk$ であることとは同値である.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{4}{n}k+3$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n \to \infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k = \dfrac{4}{n}k+3$ （ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ ）と定める．この数列は　　　　　　　　　　　　数列であり，

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{4}{n}k+3$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める．この数列は公差が の等差数列であり，

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{4}{n}k+3$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n= \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{4}{n}k+3$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=7\ .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\frac{4}{n}k+3$ （ $k=0,1,2,3,\dots,n$ ）と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=7\ .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=$ 　　なので

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k = \dfrac{4}{n}k+3$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{4}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{4}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\frac{4}{n}k+3$ （ $k=0,1,2,3,\dots,n$ ）と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=7\ .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=\frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n}=\frac{x_k-x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k-x_{k-1}}{4}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .\end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる．

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \dfrac{4}{n}k+3$ （$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 \ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{4}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{4}$ ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k - x_{k-1}}{4}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k - x_{k-1})\right\} \ .$$

これは関数　　　　のリーマン和である．

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\frac{4}{n}k+3$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=7\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n}=\frac{x_k-x_{k-1}}{4}$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k-x_{k-1}}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

これは関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和である.

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{4}{n}$ なので

$$\max\{\, x_1 - x_0 \,,\, x_2 - x_1 \,,\, x_3 - x_2 \,,\, \ldots \,,\, x_n - x_{n-1} \,\} = \frac{4}{n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \to \infty$ のとき $\max\{\, x_1 - x_0 \,,\, x_2 - x_1 \,,\, x_3 - x_2 \,,\, \ldots \,,\, x_n - x_{n-1} \,\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=\dfrac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_2,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\}=\frac{4}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^7\frac{\sqrt{x}}{4}\,dx$ に収束する.

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0,\, x_2 - x_1,\, x_3 - x_2,\, \ldots,\, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k - x_{k-1})\right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4}\,dx$ に収束する．故に，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}\right) = \int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_3^7 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=\dfrac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_2,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\}=\frac{4}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^7\frac{\sqrt{x}}{4}\,dx$ に収束する．故に，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}\right)=\int_3^7\frac{\sqrt{x}}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int_3^7 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_3^7=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(7\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{7\sqrt{7}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

終

問6.10.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べよ．

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\frac{5}{n}k+2$ （ $k=0,1,2,3,\dots,n$ ）と定める．この数列は公差が　　の等差数列であり，

$$=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=\quad .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=$　　なので $\frac{1}{n}=$　　　　　．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2}=\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\qquad\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\qquad(x_k-x_{k-1})\Big\}.$$

これは関数　　　のリーマン和である．

$\boxed{\text{問}6.10.1}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べよ．

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k = \dfrac{5}{n}k+2$ （$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{5}{n}$ の等差数列であり，

$$2 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = 7\ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{5}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{5}$ ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2} = \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\qquad\qquad\Bigg) = \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\Bigg)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{\qquad\qquad (x_k - x_{k-1})\Bigg\}\ .$$

これは関数　　　　のリーマン和である．

$\boxed{\text{問}6.10.1}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べよ．

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{5}{n}k+2$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{5}{n}$ の等差数列であり，

$$2=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=7\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=\dfrac{5}{n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{5}$ ．

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k-x_{k-1}}{5}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{5}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .\end{aligned}$$

これは関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン和である．

$$\max\{x_1 - x_0\,,\ x_2 - x_1\,,\ x_3 - x_2\,,\ \ldots\,,\ x_n - x_{n-1}\} = \frac{5}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン和 $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{5}(x_k - x_{k-1})\right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5}\,dx$ に収束する．故に，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{5}{n}k+2}\right) &= \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_2^7 x^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^7 = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\left(7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{14\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{15}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が　　　の等差数列であり，

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n= \qquad .$$

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\frac{3\pi}{2n}k-\frac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=$ 　　　　なので

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3\pi}{2n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}$.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3\pi}{2n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_{k-1}\cdot\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos x_{k-1}\cdot\frac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=\dfrac{3\pi}{2n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_{k-1}\cdot\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos x_{k-1}\cdot\frac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

これは関数　　　　　　のリーマン和である.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3\pi}{2n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_{k-1}\cdot\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos x_{k-1}\cdot\frac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

これは関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和である.

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{\, x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots, x_n - x_{n-1} \,\} = \frac{3\pi}{2n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \to \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{\, x_1 - x_0 \,, x_2 - x_1 \,, x_3 - x_2 \,, \ldots, x_n - x_{n-1} \,\} = \frac{3\pi}{2n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}\,(x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \to \infty$ のとき

定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2\cos x}{3\pi}\, dx$ に収束する.

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3\pi}{2n}$ なので，

$$\max\{\,x_1-x_0\,,x_2-x_1\,,x_3-x_2\,,\ldots,x_n-x_{n-1}\,\}=\frac{3\pi}{2n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}\left(x_k-x_{k-1}\right)\right\}$ は $n\to\infty$ のとき

定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{2\cos x}{3\pi}\,dx$ に収束する．故に，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}\right]=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{2\cos x}{3\pi}\,dx$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3\pi}{2n}$ なので，

$$\max\{\, x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots, x_n - x_{n-1}\,\} = \frac{3\pi}{2n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k - x_{k-1})\right\}$ は $n \to \infty$ のとき

定積分 $\displaystyle \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2\cos x}{3\pi}\,dx$ に収束する．故に，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\}\right] = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2\cos x}{3\pi}\,dx = \frac{2}{3\pi}\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3\pi}{2n}$ なので，

$$\max\{\, x_1 - x_0 \,, x_2 - x_1 \,, x_3 - x_2 \,, \ldots \,, x_n - x_{n-1} \,\} = \frac{3\pi}{2n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \to \infty$ のとき

定積分 $\displaystyle \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2\cos x}{3\pi}\, dx$ に収束する．故に，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} \right] &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2\cos x}{3\pi}\, dx = \frac{2}{3\pi}\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \\
&= \frac{2}{3\pi}\left\{ \sin\frac{4\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\} = \frac{2}{3\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1 - \sqrt{3}}{3\pi} \ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}6.10.2}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\dfrac{7\pi}{6n}(k-1)-\dfrac{\pi}{3}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べよ．

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{7\pi}{6n}k-\dfrac{\pi}{3}$ （$k=0,1,2,3,\ldots,n$）と定める；この数列は公差が　　　の等差数列であり，

$$\quad = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = \quad .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=$　　　なので $\dfrac{1}{n}=$　　　．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1)-\frac{\pi}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\qquad\qquad\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\qquad (x_k-x_{k-1})\right\}.$$

これは関数　　　のリーマン和である．

$\boxed{\text{問}6.10.2}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\dfrac{7\pi}{6n}(k-1)-\dfrac{\pi}{3}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べよ．

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{7\pi}{6n}k-\dfrac{\pi}{3}$ （$k=0,1,2,3,\dots,n$）と定める；この数列は公差が $\dfrac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{3}=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=\frac{5\pi}{6}\ .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=\dfrac{7\pi}{6n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{6(x_k-x_{k-1})}{7\pi}$ ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1)-\frac{\pi}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\qquad\qquad\qquad\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\qquad\qquad(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

これは関数　　　　　のリーマン和である．

$\boxed{\text{問}6.10.2}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1)-\frac{\pi}{3}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べよ.

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{7\pi}{6n}k-\dfrac{\pi}{3}$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める；この数列は公差が $\dfrac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり，

$$-\frac{\pi}{3}=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=\frac{5\pi}{6}\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k-x_{k-1}=\dfrac{7\pi}{6n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{6(x_k-x_{k-1})}{7\pi}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1)-\frac{\pi}{3}\right\}&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin x_{k-1}\cdot\frac{6(x_k-x_{k-1})}{7\pi}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{6\sin x_{k-1}}{7\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .\end{aligned}$$

これは関数 $\dfrac{6\sin x}{7\pi}$ のリーマン和である.

$$\max\{\,x_1-x_0\,,x_2-x_1\,,x_3-x_2\,,\ldots,x_n-x_{n-1}\,\}=\frac{7\pi}{6n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\dfrac{6\sin x}{7\pi}$ のリーマン和 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1)-\frac{\pi}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{6\sin x_{k-1}}{7\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{6\sin x}{7\pi}\,dx$ に収束する．故に，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1)-\frac{\pi}{3}\right\}\right]&=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{6\sin x}{7\pi}\,dx=\frac{6}{7\pi}\Big[-\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\\&=\frac{6}{7\pi}\left\{-\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\\&=\frac{6}{7\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3+3\sqrt{3}}{7\pi}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる．

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\frac{3}{n}k+4}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k = \dfrac{3}{n}k+4$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

　自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\frac{3}{n}k+4}\ .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める．この数列は公差が　　の等差数列であり，

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる．

　自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n}=\frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)}=\frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4}\quad.$$

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k=\dfrac{3}{n}k+4$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める．この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり，

$$=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n= \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \dfrac{3}{n}k+4$ （$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 \ .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる．

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\frac{3}{n}k+4} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \dfrac{3}{n}k+4$ （$k=0,1,2,3,\dots,n$）と定める．この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり，

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 \ .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について，$x_k - x_{k-1} =$ 　　なので

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる．

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \dfrac{3}{n}k+4$ （ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ ）と定める．この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり，

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる．

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n}=\frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)}=\frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4}\ .$$

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{3}{n}k+4$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）と定める．この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり，

$$4=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=7\ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3}{n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{3}$ ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{3k+4n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4}\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{x_k}\frac{x_k-x_{k-1}}{3}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{x_k}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

$\boxed{例}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \le k \le n}$ を $x_k = \dfrac{3}{n}k+4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$) と定める．この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり，

$$4 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = 7 \ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4}\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{x_k}\frac{x_k - x_{k-1}}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{x_k}(x_k - x_{k-1})\right\} .$$

これは関数　　のリーマン和である.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \dfrac{3}{n}k+4$ （ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ ）と定める. この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和である.

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0,\, x_2 - x_1,\, x_3 - x_2,\, \ldots,\, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \to \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0,\, x_2 - x_1,\, x_3 - x_2,\, \ldots,\, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_2,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\}=\frac{3}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よって，関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{3k+4n}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{x_k}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_4^7\frac{2}{x}\,dx$ に収束する．

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{x_k}(x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_4^7 \frac{2}{x}\,dx$ に収束する．故に，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \int_4^7 \frac{2}{x}\,dx$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので,

$$\max\{\, x_1 - x_0\,,\, x_2 - x_1\,,\, x_3 - x_2\,,\, \ldots\,,\, x_n - x_{n-1} \} = \frac{3}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{x_k}\,(x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_4^7 \frac{2}{x}\,dx$ に収束する．故に,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \int_4^7 \frac{2}{x}\,dx = 2\Big[\ln|x|\Big]_4^7$$

$$= 2(\ln 7 - \ln 4)$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ について $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0,\, x_2 - x_1,\, x_3 - x_2,\, \ldots,\, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{x_k}(x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_4^7 \frac{2}{x}\,dx$ に収束する．故に，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{3k+4n} &= \int_4^7 \frac{2}{x}\,dx = 2\Big[\ln|x|\Big]_4^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 4) = 2\ln\frac{7}{4} = \ln\left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \ln\frac{49}{16}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}6.10.3}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{8}{4k+3n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べよ.

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n}\frac{8}{\dfrac{4}{n}k+3} \quad .$$

数列 $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ を $x_k = \qquad\qquad$ ($k=0,1,2,3,\ldots,n$) と定める. この数列は公差が　　の等差数列であり,

$$\qquad = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \qquad .$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について，$x_k - x_{k-1} = \qquad$ なので $\dfrac{1}{n} = \qquad\qquad .$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\qquad\qquad \right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ \qquad (x_k - x_{k-1})\right\} .$$

これは関数　　のリーマン和である.

$\boxed{\text{問}6.10.3}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n \to \infty$ のときの極限値を調べよ．

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n}\frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \le k \le n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ （ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ ）と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = 7 \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$ ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\qquad\qquad \right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ \qquad (x_k - x_{k-1})\right\} .$$

これは関数　　のリーマン和である．

$\boxed{問6.10.3}$ 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n \to \infty$ のときの極限値を調べよ.

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \le k \le n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ （ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ ）と定める. この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = 7 \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について， $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和である.

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n} \ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和 $\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2}{x_k}(x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_3^7 \frac{2}{x}\,dx$ に収束する．故に，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{4k+3n} &= \int_3^7 \frac{2}{x}\,dx = 2\Big[\ln|x|\Big]_3^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 3) = 2\ln\frac{7}{3} \\ &= \ln\frac{49}{9} \ .\end{aligned}$$

終