7.2 定積分の置換積分法

実数 a, b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p, q が属する区間において関数 g は連続であるとする．

実数 a, b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p, q が属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．

実数 a,b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p,q が属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ かつ $x=a$ のとき $y=p$ かつ $x=b$ のとき $y=q$

とする．

　実数 a, b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p, q が属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，

$f(x)\,dx = g(y)\,dy$　かつ　$x = a$ のとき $y = p$　かつ　$x = b$ のとき $y = q$

とする．$f(x)\,dx = g(y)\,dy$ より

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

実数 a, b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p, q が属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，

$f(x)\,dx = g(y)\,dy$ かつ $x = a$ のとき $y = p$ かつ $x = b$ のとき $y = q$ とする． $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ より

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

$x = a$ のとき $y = p$ ， $x = b$ のとき $y = q$ なので，

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} = \left[\int g(y)\,dy\right]_{y=p}^{y=q} \ ;$$

実数 a, b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p, q が属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，

$f(x)\,dx = g(y)\,dy$ かつ $x = a$ のとき $y = p$ かつ $x = b$ のとき $y = q$

とする． $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ より

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

$x = a$ のとき $y = p$ ， $x = b$ のとき $y = q$ なので，

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} = \left[\int g(y)\,dy\right]_{y=p}^{y=q} \ ;$$

6.8 節で述べた定理より，

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x)\,dx \ , \qquad \left[\int g(y)\,dy\right]_{y=p}^{y=q} = \int_p^q g(y)\,dy \ ,$$

実数 a, b が属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p, q が属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，

$f(x)\,dx = g(y)\,dy$　かつ　$x = a$ のとき $y = p$　かつ　$x = b$ のとき $y = q$

とする． $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ より

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

$x = a$ のとき $y = p$ ， $x = b$ のとき $y = q$ なので，

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} = \left[\int g(y)\,dy\right]_{y=p}^{y=q} \ ;$$

6.8 節で述べた定理より，

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x)\,dx \ , \qquad \left[\int g(y)\,dy\right]_{y=p}^{y=q} = \int_p^q g(y)\,dy \ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,dx = \int_p^q g(y)\,dy$ ．

定理（定積分の置換積分法）　実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p と q とが属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，$y = \varphi(x)$ である変数 x, y 及び各々の微分 dx, dy について，

$x = a$ のとき $y = p$ ，$x = b$ のとき $y = q$ ，$f(x)\,dx = g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_p^q g(y)\,dy \ .$$

定理（定積分の置換積分法）　実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとする．実数 p と q とが属する区間において関数 g は連続であるとする．また，変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．更に，$y=\varphi(x)$ である変数 $x\,,y$ 及び各々の微分 $dx\,,dy$ について，

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy\ .$$

変数 x の関数 y について，定積分では，積分変数 x を積分変数 y に置き換えるとき，x の値の範囲を y の値の範囲に置き換える必要がある．

例 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x + 1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y = 2x+1$ より, $x = 0$ のとき $y = 1$, $x = 4$ のとき $y = 9$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y = 2x+1$ より, $x = 0$ のとき $y = 1$, $x = 4$ のとき $y = 9$. 故に,

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy$$

例 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より, $x=0$ のとき $y=1$, $x=4$ のとき $y=9$. 故に,

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^9 y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{81}-1\right) = \frac{20}{81} \ .$$

例 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算してから微分積分の基本定理を適用しても計算できる: $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$ （C は積分定数） なので,

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right]_0^4 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^4 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{1^2}\right)$$
$$= \frac{20}{81}\ .$$

終

$\boxed{問7.2.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=$ なので $dy=\quad dz$. $y=2$ のとき $z=\quad$. $y=4$ のとき $z=\quad$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy=\int \qquad dz$$

$\boxed{\text{問 }7.2.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z = 3y - 5$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 3$ なので $dy = \dfrac{1}{3}dz$. $y = 2$ のとき $z = 1$. $y = 4$ のとき $z = 7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy = \int_1^7 \frac{6}{z^2}\,\frac{1}{3}\,dz = 2\left[-\frac{1}{z}\right]_1^7 = 2\left(-\frac{1}{7}+1\right) = \frac{12}{7}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z =$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\pi}{3}$ なので $dy = \dfrac{3}{\pi}dz$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\pi}{3}$ なので $dy = \dfrac{3}{\pi}\,dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\,\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \quad .$$

例 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\frac{3}{\pi}dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$, $y=5$ のとき $z=\pi$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\pi}{3}$ なので $dy = \dfrac{3}{\pi}dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\frac{3}{\pi}dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y=3$ のとき $z = \dfrac{\pi}{3}$, $y = 5$ のとき $z = \pi$. 従って,

$$\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{3}{\pi}\sin z\,dz$$

例 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\pi}{3}$ なので $dy = \dfrac{3}{\pi}dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz\ .$$

$z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y = 3$ のとき $z = \dfrac{\pi}{3}$, $y = 5$ のとき $z = \pi$. 従って,

$$\begin{aligned}\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{3}{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\Big[-\cos z\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{9}{2\pi}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.2.2(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y=$ とおく. $\dfrac{dy}{dz}=$ なので $dx=$ dy . $x=0$ のとき $y=$. $x=3$ のとき $y=$. よって,

$$\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx = \int \quad (\quad) \quad dy$$

$\boxed{\text{問 }7.2.2(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y = \dfrac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{5\pi}{6}$ なので $dx = \dfrac{6}{5\pi}\,dy$. $x = 0$ のとき $y = -\dfrac{\pi}{2}$. $x = 3$ のとき $y = 2\pi$. よって,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (\sin y)\,\frac{6}{5\pi}\,dy = \frac{6}{5\pi}\Big[-\cos y\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{6}{5\pi}\left\{-\cos 2\pi + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{6}{5\pi}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問7.2.2(2)}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算しなさい.

変数 v を $v =$ とおく. $\dfrac{dv}{du} =$ なので $du =$ dv . $u = 2$ のとき $v =$. $u = 4$ のとき $v =$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int \qquad dv$$

$\boxed{\text{問}7.2.2(2)}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算しなさい.

変数 v を $v = 2u - 5$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 2$ なので $du = \dfrac{1}{2}\,dv$. $u = 2$ のとき $v = -1$. $u = 4$ のとき $v = 3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int_{-1}^{3} e^v \,\frac{1}{2}\,dv = \frac{1}{2}\big[e^v\big]_{-1}^{3} = \frac{1}{2}\Big(e^3 - \frac{1}{e}\Big) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y =$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2 + 1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

例 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

$y = x^2+1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

$y = x^2+1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$. 従って,

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_{2}^{5} \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy$$

例 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

$y=x^2+1$ より, $x=-1$ のとき $y=2$, $x=2$ のとき $y=5$. 従って,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int_{2}^{5}\frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{5} = \frac{1}{3}\left[y\sqrt{y}\right]_{2}^{5} \\ &= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right) \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.2.3(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので $x\,dx =$ dy . $x = -1$ のとき $y =$. $x = 2$ のとき $y =$. よって,

$$\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx = \int \qquad dy$$

$\boxed{\text{問}7.2.3(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. $x = -1$ のとき $y = 3$. $x = 2$ のとき $y = 6$. よって,

$$\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx = \int_{3}^{6} \frac{6}{y}\,\frac{1}{2}\,dy = 3\int_{2}^{6} \frac{1}{y}\,dy = 3\Big[\ln y\Big]_3^6 = 3(\ln 6 - \ln 3) = 3\ln 2$$
$$= \ln 8 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.3(2)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので $x\,dx =$ dy . $x = 0$ のとき $y =$. $x = 4$ のとき $y =$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \qquad dy \qquad .$$

$\boxed{問7.2.3(2)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 9$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$. $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_9^{25} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\Big[2\sqrt{y}\,\Big]_9^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2 \ .$$

$\boxed{終}$