7.2　定積分の置換積分法

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y)$$

変数 y の関数 $G(y)$ を変数 x で微分する．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき， $y=\varphi(x)$ である変数 x, y について $\dfrac{d}{dx}f(y)=\dfrac{d}{dy}f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので，

変数 y が変数 x の微分可能な関数であるとき，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及び関数 f と g 及び x の微分 dx 及び y の微分 dy について，

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y)\,dy = f(x)\,dx \ .$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big)$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

$$\int_p^q g(y)\,dy =$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ ,$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a と b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx} \ .$$

$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると， $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．つまり， $x=a$ のとき $y=\varphi(a)=p$ であり， $x=b$ のとき $y=\varphi(b)=q$ であるとき， $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．

定理（定積分の置換積分法）　変数 x の関数 y は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であり，関数 g は実数 p から実数 q まで定積分可能であるとする．

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy\ .$$

定理（定積分の置換積分法）　変数 x の関数 y は実数 a と b が属すある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であり，関数 g は実数 p から実数 q まで定積分可能であるとする．

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy\ .$$

変数 x の関数 y について，定積分では，積分変数 x を積分変数 y に置き換えるとき，x の値の範囲を y の値の範囲に置き換える必要がある．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=$ 　　 とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より, $x=0$ のとき $y=1$, $x=4$ のとき $y=9$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より, $x=0$ のとき $y=1$, $x=4$ のとき $y=9$. 故に,

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy$$

積分変数 x の値の範囲を積分変数 y の値の範囲に換える.

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=2x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より, $x=0$ のとき $y=1$, $x=4$ のとき $y=9$. 故に,

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^9 y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{81}-1\right) = \frac{20}{81} \ .$$

例 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算してから微分積分の基本定理を適用しても計算できる. 変数 y を $y=2x+1$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$.
積分定数を C とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx &= \int \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}y^{-2}+C \\ &= -\frac{1}{4(2x+1)^2}+C\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx &= \left[-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right]_0^4 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^4 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^2}-\frac{1}{1^2}\right) \\ &= \frac{20}{81}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.2.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=$ 　　 とおく. $\dfrac{dz}{dy}=$ 　 なので $dy=$ 　 dz . $y=2$ のとき $z=$ 　 . $y=4$ のとき $z=$ 　 . よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy = \int \qquad dz$$

$\boxed{\text{問}7.2.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=3y-5$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=3$ なので $dy=\dfrac{1}{3}dz$. $y=2$ のとき $z=1$. $y=4$ のとき $z=7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy = \int \qquad dz$$

$\boxed{\text{問}7.2.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=3y-5$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=3$ なので $dy=\dfrac{1}{3}dz$. $y=2$ のとき $z=1$. $y=4$ のとき $z=7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy=\int_1^7 \frac{6}{z^2}\,\frac{1}{3}\,dz=2\left[-\frac{1}{z}\right]_1^7=2\left(-\frac{1}{7}+1\right)=\frac{12}{7}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z =$ 　　とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy \;=\; (\sin z)\,\frac{3}{\pi}\,dz \;=\; \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \;.$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy \;=\; (\sin z)\,\frac{3}{\pi}\,dz \;=\; \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \;.$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$, $y=5$ のとき $z=\pi$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz\ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$, $y=5$ のとき $z=\pi$. 従って,

$$\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{3}{\pi}\sin z\,dz$$

積分変数 y の値の範囲を積分変数 z の値の範囲に換える.

例 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}dz$. よって,

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = (\sin z)\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz\ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$, $y=5$ のとき $z=\pi$. 従って,

$$\begin{aligned}\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{3}{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\Big[-\cos z\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\\ &= \frac{3}{\pi}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{9}{2\pi}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.2.2(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y=$ 　　 とおく. $\dfrac{dy}{dz}=$ 　　 なので $dx=$ 　　 dy . $x=0$ のとき $y=$ 　　 . $x=3$ のとき $y=$ 　　 . よって,

$$\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx = \int \quad (\qquad) \qquad dy$$

$\boxed{\text{問}7.2.2(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y=\dfrac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{5\pi}{6}$ なので $dx=\dfrac{6}{5\pi}\,dy$. $x=0$ のとき $y=-\dfrac{\pi}{2}$. $x=3$ のとき $y=2\pi$. よって,

$$\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx=\int \quad (\qquad) \qquad dy$$

$\boxed{\text{問}7.2.2(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y=\dfrac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{5\pi}{6}$ なので $dx=\dfrac{6}{5\pi}\,dy$. $x=0$ のとき $y=-\dfrac{\pi}{2}$. $x=3$ のとき $y=2\pi$. よって,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}(\sin y)\,\frac{6}{5\pi}\,dy = \frac{6}{5\pi}\Big[-\cos y\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\\ &= \frac{6}{5\pi}\left\{-\cos 2\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\ &= -\frac{6}{5\pi}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.2(2)}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算しなさい.

変数 v を $v=$ 　　 とおく. $\dfrac{dv}{du}=$ 　 なので $du=$ 　 dv . $u=2$ のとき $v=$ 　 . $u=4$ のとき $v=$ 　 . よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int \qquad dv$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.2(2)}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算しなさい.

変数 v を $v=2u-5$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=2$ なので $du=\dfrac{1}{2}dv$. $u=2$ のとき $v=-1$. $u=4$ のとき $v=3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int \qquad dv$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.2(2)}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算しなさい.

変数 v を $v=2u-5$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=2$ なので $du=\dfrac{1}{2}dv$. $u=2$ のとき $v=-1$. $u=4$ のとき $v=3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du=\int_{-1}^{3} e^v\,\frac{1}{2}\,dv=\frac{1}{2}\left[e^v\right]_{-1}^{3}=\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e}\right) .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=$ 　　 とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

$y = x^2+1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy \ .$$

$y = x^2+1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$. 従って,

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_{2}^{5} \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy$$

積分変数 x の値の範囲を積分変数 y の値の範囲に換える.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy\ .$$

$y=x^2+1$ より, $x=-1$ のとき $y=2$, $x=2$ のとき $y=5$. 従って,

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_{2}^{5}\frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{5} = \frac{1}{3}\left[y\sqrt{y}\right]_{2}^{5}$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.3(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ 　　 とおく. $\dfrac{dy}{dx}=$ 　　 なので $x\,dx=$ 　 dy . $x=-1$ のとき $y=$ 　 . $x=2$ のとき $y=$ 　 . よって,

$$\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx=\int \qquad dy$$

$\boxed{\text{問}7.2.3(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=x^2+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$. $x=-1$ のとき $y=3$. $x=2$ のとき $y=6$. よって,

$$\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx=\int\qquad dy$$

$\boxed{\text{問}7.2.3(1)}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=x^2+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$. $x=-1$ のとき $y=3$. $x=2$ のとき $y=6$. よって,

$$\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx=\int_{3}^{6}\frac{6}{y}\,\frac{1}{2}\,dy=3\int_{2}^{6}\frac{1}{y}\,dy=3\Big[\ln y\Big]_{3}^{6}=3(\ln 6-\ln 3)=3\ln 2$$

$$=\ln 8\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.3(2)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ 　　 とおく. $\dfrac{dy}{dx}=$ 　　 なので $x\,dx=$ 　dy . $x=0$ のとき $y=$ 　. $x=4$ のとき $y=$ 　. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \qquad\qquad dy \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}7.2.3(2)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2+9$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$. $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \qquad\qquad dy \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}7.2.3(2)}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2+9$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$. $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_9^{25} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\Big[2\sqrt{y}\,\Big]_9^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$